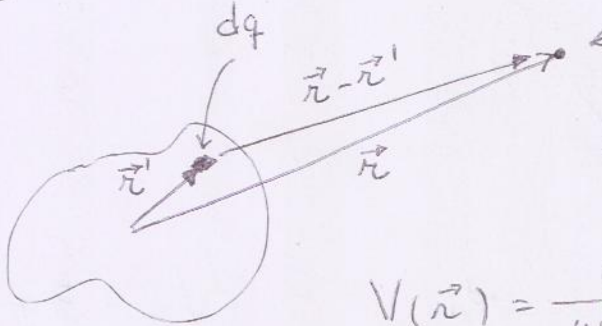
A

Algo de Electromagnetismo

Supongamos que tenemos una distribución de carga eléctrica

$V(\vec{r}) = \,?$



$$dq = \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' \qquad (a)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (b)$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}}} \qquad (c)$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\left(1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)^{-1/2} \qquad (d)$$

Cuando $r \gg r'$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \simeq \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right) \qquad (e)$$

Conservando solamente los términos proporcionales a $\frac{1}{r}$ y $\frac{1}{r^2}$

B

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) \qquad (f)$$

Sustituyendo (f) en (b)

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)\rho(\vec{r}')\,d^3\vec{r}' \qquad (g)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \rho(\vec{r}')\,d^3\vec{r}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\,\vec{r}\cdot\int \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,d^3\vec{r}' \qquad (h)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\hat{r}\cdot\vec{p} \qquad (i)$$

donde Q es la carga eléctrica total de la distribución

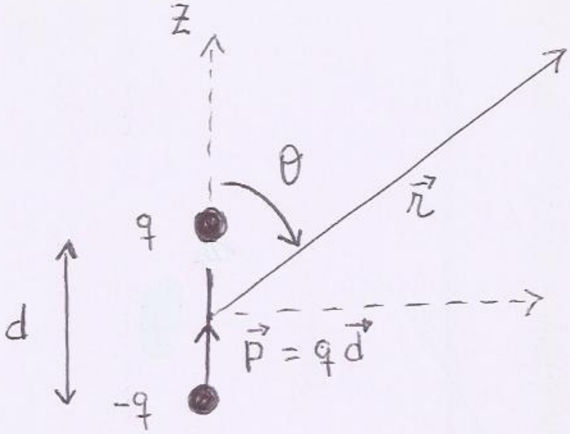
y

$$\vec{p} = \int \vec{r}'\,\rho(\vec{r}')\,d^3\vec{r}' \qquad (j)$$

es el momento dipolar eléctrico.

Si por ejemplo tenemos un dipolo "puro" eléctrico formado por dos cargas localizadas en $\vec{r}_q = \frac{d}{2}\hat{k}$ y $\vec{r}_{-q} = -\frac{d}{2}\hat{k}$

C



podemos (usando deltas de Dirac) escribir la densidad de carga

$$\rho(\vec{r}\,') = q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \frac{d}{2}\hat{k}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}\,' + \frac{d}{2}\hat{k}\right) \quad (k)$$

Sustituyendo la ecuación (k) en la ecuación (j):

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,' \left[q\,\delta\left(\vec{r}\,' - \frac{d}{2}\hat{k}\right) - q\,\delta\left(\vec{r}\,' + \frac{d}{2}\hat{k}\right) \right] d^3\vec{r}\,' \quad (l)$$

Por las propiedades de la Delta de Dirac en las integrales:

$$\vec{p} = q\left(\frac{d}{2}\hat{k}\right) - q\left(-\frac{d}{2}\hat{k}\right) = q\,d\,\hat{k} \quad ✓✓ \quad (m)$$

Sustituyendo (m) en (i):

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,q\,d\,\hat{r}\cdot\hat{k} \quad (o)$$

$$V(r) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}}_{\text{Término monopolar eléctrico}} + \underbrace{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}}_{\text{Término dipolar eléctrico}} \quad (p)$$