Cuadrivectores en relatividad

Ya que los conceptos de espacio y tiempo están mezclados en la naturaleza es conveniente expresar los eventos que ocurren en el universo mediante un vector 4D (x, y, z, ict)

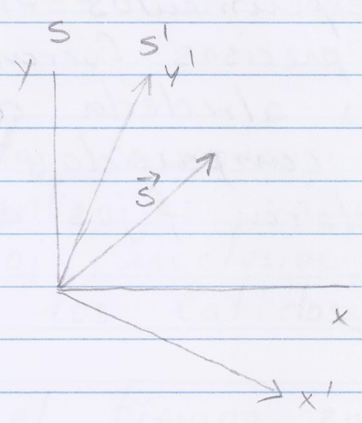
La razón para escoger la cuarta coordenada como ict es que la cantidad

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \qquad (74)$$

es invariante bajo una transformación de Lorentz.

Esto quiere decir que si un evento se mide en S con coordenadas x, y, z, t y en S' con coordenadas x', y', z', t' entonces

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2. \qquad (75)$$



La magnitud de $\vec{s}$ al cuadrado es la misma en S y S'

Podemos demostrar que $\exists$ otro cuadrivector que permanece invariante ante transf. de Lorentz

$$\left(p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c}\right)$$

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \left[i\left(\frac{E}{c}\right)\right]^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2$$ es invariante

$\vec{p}$ es el momento lineal del objeto

E es la energía total

Suma de velocidades

Escribimos dx, dy, dz y dt a partir de (64) → (67)

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (76)$$

$$dy = dy' \quad (77)$$

$$dz = dz' \quad (78)$$

$$dt = \frac{dt' + v\,dx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (79)$$

La velocidad medida desde S será

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v\,dx'}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \quad (80)$$

$$V_x = \frac{V_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} V_x'} \quad (81)$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + v\,dx'/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{\frac{dy'}{dt'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v\,V_x'/c^2} = \frac{V_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1+v\,V_x'/c^2} \quad (82)$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt' + v\,dx'/c^2}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{V_z'}{1+v\,V_x'/c^2}\sqrt{1-\beta^2} \quad (83)$$

B) Transformaciones Inversas de Lorentz

$$x = \frac{x' + v t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (64)$$

$$y = y' \qquad (65)$$

$$z = z' \qquad (66)$$

$$t = \frac{t' + v/c^2 \, x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (67)$$

Si $V_x' = c$

$$\Rightarrow V_x = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = \frac{\cancel{c+v}}{\cancel{c+v}}\,c$$

$$\Rightarrow V_x = c \quad \checkmark$$

Si $V_y' = c \Rightarrow V_x' = V_z' = 0 \Rightarrow V_x = v$ y $V_y = c\sqrt{1-\beta^2}$ $\quad V_z = 0$

$$\Rightarrow V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = v^2 + c^2(1-\beta^2) = c^2 \Rightarrow V = c$$

Masa Relativista

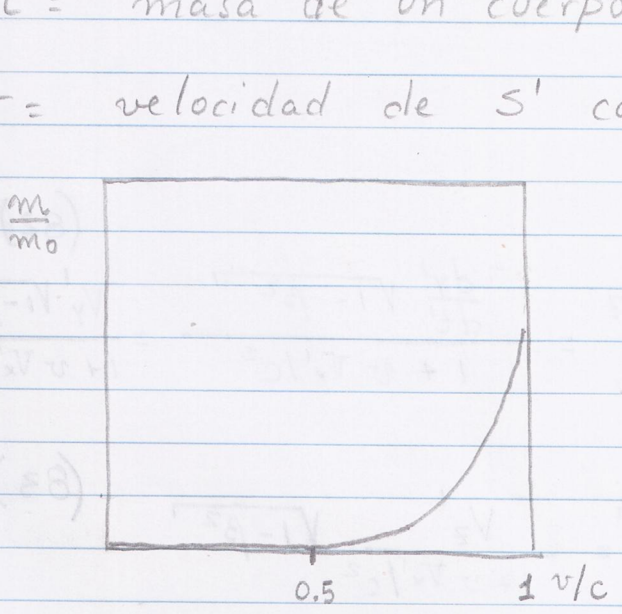
Podemos demostrar que (leer libro)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = v/c \qquad (84)$$

m_0 = masa de un cuerpo medida por un observador S' que se encuentra en reposo con respecto a la masa (masa propia o masa en reposo)

m = masa de un cuerpo medida desde S

v = velocidad de S' con respecto a S



La primera confirmación experimental de la ecuación (84) fué el descubrimiento de Bücherer en 1908 de que la razón $\frac{e}{m}$ del electrón era menor para electrones rápidos.

Momento Relativista

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\vec{v} \qquad (85)$$

La conservación del momento lineal es válida en relatividad especial al igual que en física clasica.

2da Ley de Newton en forma relativista

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \qquad (86)$$

Energía cinética

$\Delta K = W$ (Teorema del trabajo y Energía)

$K_B - K_A = W_{AB}$

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \frac{d}{dt}(m\vec{v})\cdot d\vec{r} = \int d(m\vec{v})\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$W_{AB} = \int \vec{v} \cdot d(m\vec{v})$$

$$d(\vec{v} \cdot m\vec{v}) = \vec{v} \cdot d(m\vec{v}) + m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$W_{AB} = \int_{\vec{v}_A = 0}^{\vec{v}} d(\vec{v} \cdot m\vec{v}) - m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$W = m v^2 - \int_0^{\vec{v}} \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Si $\vec{v} \parallel d\vec{v}$

$$W = m v^2 - \int_0^{v} \frac{m_0 \, v \, dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Cambio de variable $\xi = 1 - v^2/c^2$

$$d\xi = -2v/c^2 \, dv \Rightarrow \int \frac{v \, dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -\int \frac{c^2 \, d\xi}{2 \, \xi^{1/2}} = - c^2 \xi^{1/2}$$

$$W = m v^2 + m_0 c^2 \left(\left[1 - v^2/c^2\right]^{1/2} - 1 \right)$$

$$W = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v^2 + m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - m_0 c^2$$

$$W = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

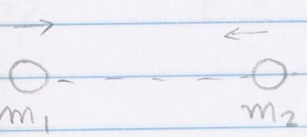
$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

$$K = mc^2 - m_0 c^2 \qquad (87)$$

$$\underbrace{mc^2}_{\text{Energía total}} = \underbrace{K}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Energía en reposo} \, = \, E_0} \qquad (88)$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2 \qquad (89) \longleftarrow \text{Energía total}$$

Principio de Conservación de Energía - Masa



$$E = E_1 + E_2 = m_{01} c^2 + K_1 + m_{02} c^2 + K_2$$

Despues de la interacción $E = E_3 + E_4 = m_{03} c^2 + K_3 + m_{04} c^2 + K_4$

$$\Rightarrow E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \Rightarrow (m_{01} + m_{02} - m_{03} - m_{04}) c^2 = K_3 + K_4 - K_1 - K_2$$

$$- \Delta m_0 c^2 = \Delta K \qquad (90)$$

Una disminución en la masa en reposo Δm_0 ($\Delta m_0 < 0$) implica un aumento de energía cinética ΔK ($\Delta K > 0$) y un aumento de la masa ($\Delta m_0 > 0$) implica una disminución de la energía cinética ($\Delta K < 0$).

Cuando explota 1 kg de dinamita, solo 6×10^{-11} kg desaparecen y se convierten en energía cinética que representa

$$\Delta K = -\Delta m c^2 = -(-6 \times 10^{-11} kg)(3 \times 10^8 m/s^2$$

$$\Delta K = 54 \times 10^5 J = 5.4 \times 10^6 J = 5.4$$

de J

lo cual es una cantidad bastante alta.

La energía de una masa de 1 Kg es 9×10^{16} J la cual sería suficiente para enviar una carga de un millón de toneladas a la luna.

K a bajas velocidades

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2 \qquad (91)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad v << c$$

$$K = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - m_0c^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m_0v^2 \qquad (92)$$

Otra ecuación relativista importante

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (93)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (94)$$

Calculemos $E^2 - (pc)^2 = \dfrac{m_0^2c^4}{1-v^2/c^2} - \dfrac{m_0^2v^2c^2}{1-v^2/c^2} = \dfrac{m_0^2c^2(c^2-v^2)}{1-v^2/c^2}$

$$E^2 - (pc)^2 = m_0^2c^4 \Rightarrow E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad E = \sqrt{(m_0c^2) + (pc)^2} \qquad (95)$$

El electronvoltio (eV)

1 eV es la energía ganada por un electrón cuando es acelerado por una diferencia de potencial de 1 V

A B

$$K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow \Delta K = -\Delta U = -q\,\Delta V \qquad (96)$$

$$q = -1.602\times10^{-19}\,C \qquad \Rightarrow \Delta K = 1\ eV = +1.602\times10^{-19}\,C\ 1\,V$$

$$1\,eV = 1.602\times10^{-19}\,J$$

1 kiloelectronvoltio = 1 keV = 10^3 eV
1 mega . . . . . . = 1 MeV = 10^6 eV
1 giga . . . . . . = 1 GeV = 10^9 eV

Cuando un núcleo de Uranio se fisiona, se generan ~ 200 MeV de energía.

Las energías en reposo de partículas elementales (m_0c^2) generalmente están en MeV y GeV, de forma que se acostumbra a usar como unidades para sus masas en reposo MeV/c^2 y GeV/c^2 respectivamente.

De la misma forma como $[E] = [p][c]$

las unidades de momento lineal usualmente son MeV/c y GeV/c respectivamente.