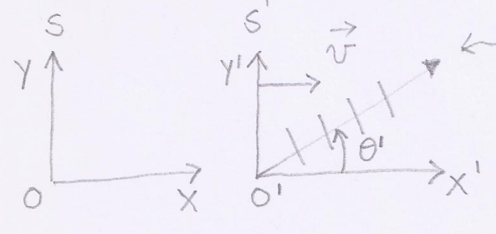
## Aberración y Efecto Doppler




Rayo de onda electromagnética paralelo al plano $x'y'$ con dirección $\theta'$

$$\Rightarrow e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega' t')} \qquad e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

medido por observador $O'$ — medido por observador $O$

$$\alpha' = \vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega' t' = \frac{2\pi}{\lambda'}\left(\cos\theta' x' + \operatorname{Sen}\theta' y'\right) - 2\pi\nu' t' \qquad (1)$$

Pero

$$x' = (x - vt)\gamma \qquad (2)$$
$$y' = y \qquad (3)$$
$$t' = \left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\gamma \qquad (4)$$

$\Rightarrow$ (1) se transforma en

$$\alpha' = \frac{2\pi}{\lambda'}\left(\cos\theta'(x - vt)\gamma + \operatorname{Sen}\theta' y\right) - 2\pi\nu'\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\gamma =$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda'}\cos\theta'\gamma + 2\pi\nu'\frac{v}{c^2}\gamma\right)x + \left(\frac{2\pi}{\lambda'}\operatorname{sen}\theta'\right)y + \left[-2\pi\nu'\gamma + \frac{2\pi}{\lambda'}\cos\theta'(-v\gamma)\right]t \qquad (5)$$

Como $\nu'\lambda' = c$ (6)

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda'}\operatorname{Sen}\theta'\right)y - \left[2\pi\nu'\gamma + \frac{2\pi\nu'}{c}\cos\theta' v\gamma\right]t \qquad (6)$$

$$\alpha' = \left(\frac{2\pi}{\lambda'}\cos\theta'\gamma + 2\pi\frac{v}{c\lambda'}\gamma\right)x + \frac{2\pi}{\lambda'}(\operatorname{Sen}\theta')y - 2\pi\nu'\left[\gamma + \cos\theta'\frac{v}{c}\gamma\right]t \qquad (7)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda'}\left(\gamma\cos\theta' + \frac{v}{c}\gamma\right)x$$

Hay que comparar la ec. (7) con (8)

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta\right)x + \frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{Sen}\theta\, y - 2\pi\nu t$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda'}\gamma\left(\cos\theta' + \frac{v}{c}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta \qquad (9)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda'}\operatorname{Sen}\theta' = \frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{Sen}\theta \qquad (10)$$

$$2\pi\nu'\gamma\left(1 + \cos\theta'\frac{v}{c}\right) = 2\pi\nu \qquad (11)$$

$$\nu'\lambda' = c \qquad (12)$$

De las ecuaciones (9) y (10):

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{Sen}\theta'}{\gamma\,(\cos\theta' + v/c)} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}\,\operatorname{Sen}\theta'}{(v/c + \cos\theta')} \leftarrow \text{Aberración de la luz} \quad (13)$$

Inversa $\rightarrow$ $$\tan\theta' = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}\,\operatorname{Sen}\theta}{(-v/c + \cos\theta)} \quad (14)$$

---

La ecuación (11) representa el efecto Doppler:

$$\nu = \nu' \frac{(1 + \cos\theta'\, v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (15)$$

Inversa

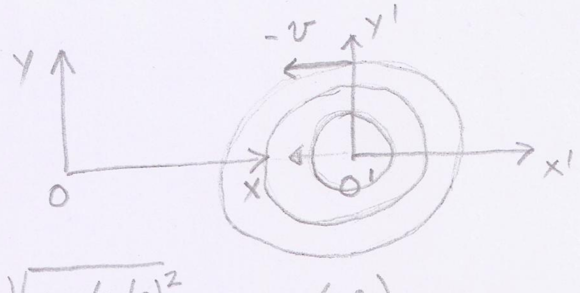
$$\nu' = \nu \frac{(1 - \cos\theta\, v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (16)$$

$$(16) \Rightarrow \nu = \nu' \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{(1 - \cos\theta\, v/c)} \quad (17)$$

El <u>efecto Doppler longitudinal</u> se produce cuando $\theta = 0°$ y $\theta = 180°$. Las ecuaciones (15), (16) y (17) fueron obtenidas cuando el sistema $S'$ se aleja de $S$. La ecuación (17) es la frecuencia que mide el observador $O$ del sistema $S$ de una onda emitida por el observador $O'$. Dicha onda tiene una dirección $\theta$ medida por $O$: De acuerdo a las ecuaciones (15), (16) y (17) ocurre que el observador $O'$ (fuente) se aleja del observador $O$ y cuando $\theta = 180°$, el observador $O$ mide las ondas que el observador $O'$ "va dejando atrás". Este caso corresponde entonces a la fuente y el detector separándose.

$$\Rightarrow \nu = \nu' \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{(1 + v/c)} = \nu' \frac{\sqrt{(1-v/c)(1+v/c)}}{(1+v/c)} = \nu' \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} < \nu' \quad (18)$$

En el caso en que se acercan el observador O y O' se cambia $v$ por $-v$ en las ecuaciones (15), (16) y (17).



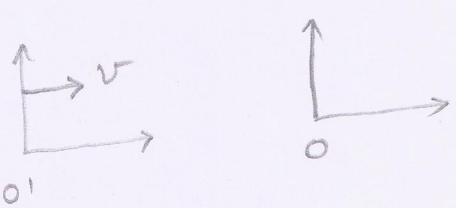

$$\Rightarrow \nu = \frac{\nu' \sqrt{1-(v/c)^2}}{\left(1 + \cos\theta \, \frac{v}{c}\right)} \qquad (19)$$

Las ondas que el observador O mide a $\theta = 180°$, son ondas que están localizadas y "agolpadas" delante del observador O'.

Evaluando (19) en $\theta = 180°$

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - v/c} = \nu' \frac{\sqrt{(1-v/c)(1+v/c)}}{1-v/c} = \nu' \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} > \nu' \qquad (20)$$

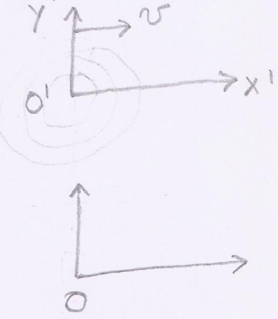
Otra forma de hacer este cálculo es imaginar que el observador O' está a la izquierda del O




En este caso hay que usar la ecuación (17) y el ángulo de detección de la dirección de la onda según el observador O es $0°$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\nu' \sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos 0°} = \nu' \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-v/c} = \nu' \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

El efecto Doppler transversal ocurre cuando el observador O' (fuente) emite ondas que el observador O detecta con una dirección $\theta = 90°$ o $-90°$




$\cos\theta = 0$

En este caso $\nu = \nu' \sqrt{1-(v/c)^2}$ (21)

No hay Doppler transverso en física clásica!!