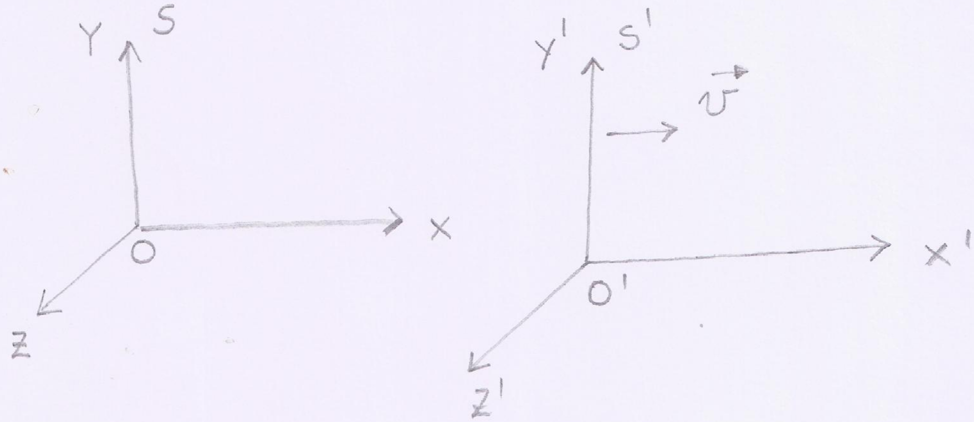
Las transformaciones de Lorentz

Lectura Concepts of Modern Physics, Arthur Beiser, 2003
6th Edition, pag. 38-41.
(Esta es una razonable forma de obtener
las transformaciones de Lorents = TL's)



$$\left.\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} && (1)\\
y' &= y && (2)\\
z' &= z && (3)\\
t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} && (4)
\end{aligned}\right\} \text{TL's}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$x' = \gamma (x - vt) \quad (5)$$

$$y' = y \quad (6)$$

$$z' = z \quad (7)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad (8)$$

Transformaciones Inversas de Lorentz (TIL's)

$$x = \gamma\,(x' + v t') \quad (9)$$

$$y = y' \quad (10)$$

$$z = z' \quad (11)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v x'}{c^2}\right) \quad (12)$$

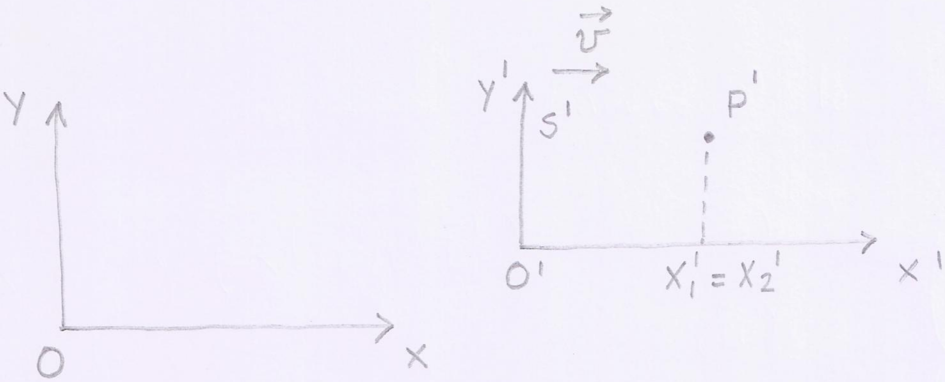
TIL's

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Dilatación del tiempo

Tiempo propio Es el tiempo que transcurre entre dos eventos 1 y 2 que ocurren en el mismo punto del espacio en un marco de referencia inercial. Es el tiempo entre dos eventos medido por el mismo reloj.

Tiempo no propio Es el tiempo entre dos eventos (1 y 2) medido por diferentes relojes localizados en distintos puntos de un marco de referencia inercial.



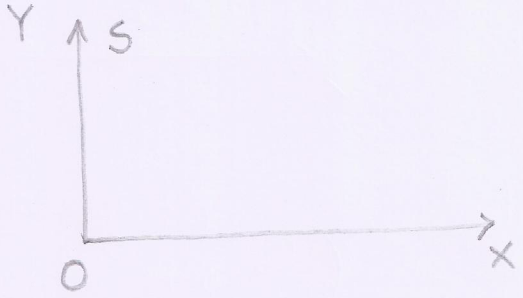
Supongamos que en el punto P' (anclado al marco de referencia S') se produce un evento 1 seguido por un evento 2. El reloj que se encuentra en el punto P' registró que el evento 1 ocurrió en el tiempo t_1' y el evento 2 en el tiempo t_2'.

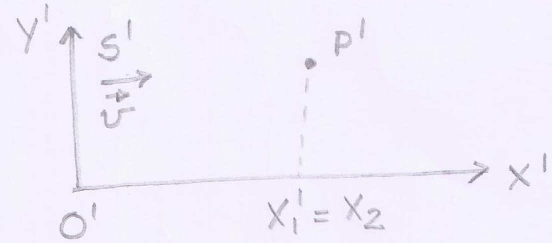
Como ambos eventos se produjeran en el mismo punto P' (anclado a S') entonces las coordenadas x' de ambos eventos son las mismas, esto es,

$x_1' = x_2'$.

Además, como ambos eventos ocurrieron en el mismo punto P' del marco de referencia S' y fueron medidos por el mismo reloj, entonces el tiempo que transcurrio entre los eventos, medido por dicho reloj, $t_2' - t_1'$, es un tiempo propio.

Por otro lado, ambos eventos no ocurren en el mismo punto del marco de referencia S





pues el punto P' donde ellos ocurren está anclado a S' que se mueve con respecto a S con una velocidad $\vec{v}$.

Esto quiere decir que los eventos 1 y 2 serán medidos por distintos relojes del marco S y por lo tanto ocurrirán en distintas posiciones (x_1 y x_2) del marco de referencia S.

Esto implica que el tiempo que transcurre entre los eventos 1 y 2 medido desde S, $t_2 - t_1$, no es un tiempo propio.

¿Son los tiempos $t_2' - t_1'$ y $t_2 - t_1$ iguales?

Veamos !!

Según las TIL's

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad (13)$$

con $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (14)$$

✓ La ecuación (13) quiere decir que un evento cuya posición y tiempo medidos en S' son x' y t', será registrado en S con tiempo de ocurrencia t.

✓ Si los eventos 1 y 2 ocurrieron (segun S') con coordenadas (x_1', t_1') y (x_2', t_2') respectivamente, entonces, segun S, dichos eventos tendrán coordenadas (x_1, t_1) y (x_2, t_2) respectivamente.

✓ La ecuación (13) se puede escribir para el evento 1 como

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'\right) \qquad (15)$$

y para el evento 2

$$t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'\right) \qquad (16)$$

Restando (16) y (15) :

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'\right)$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') + \gamma \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1') \qquad (17)$$

En este caso $x_1' = x_2'$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') \qquad (18)$$

Ya que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ y $v < c \Rightarrow \gamma > 1$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 > t_2' - t_1' \qquad (19)$$

El intervalo de tiempo entre los eventos 1 y 2 medido desde S (tiempo no propio) es mayor que el medido desde S' (tiempo propio).

De hecho, el menor intervalo de tiempo posible entre dos eventos es el tiempo propio, es decir, el intervalo de tiempo medido por un mismo reloj.

- ✓ Cualquier otro intervalo de tiempo, medido por relojes distintos, siempre será mayor que el intervalo de tiempo propio.
- ✓ Es por esto que se habla de la dilatación del tiempo.

Mas comentarios :

- ✓ El intervalo de tiempo propio es el intervalo de tiempo registrado por un reloj fijo al cuerpo observado.
- ✓ Como en la expresión $t_2 - t_1 = \gamma (t_2' - t_1')$, el intervalo de tiempo no propio $t_2 - t_1$ (medido por relojes anclados a S) es mayor que el intervalo de tiempo propio $t_2' - t_1'$ (medido por un reloj anclado a S').
- ✓ Esto puede interpretarse como que, comparado con los relojes de S, el reloj fijo a S' se atrasa porque el tiempo que éste mide es menor que el tiempo medido por los relojes fijos al marco de referencia S.

✓ Esto tambien puede parafrasearse : el reloj del marco S' se enlentece comparado con los relojes del marco S.

✓ Recordando la definición de reloj estándar (Desloge), "Es un sistema físico, preferiblemente pequeño, cuyo estado cambia ciclicamente con un período constante", podriamos seleccionar como reloj a uno biológico, como por ejemplo el corazón humano.

✓ Si suponemos que $v = 0.8\,c$ $\Rightarrow \gamma = \sqrt{1-(v/c)^2} = 0.6$

$$\Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{1}{0.6}\,(t_2' - t_1')$$

✓ Si $t_2' - t_1'$ es el intervalo de tiempo propio entre un latido y otro del corazón de Dick (Dick se encuentra en una nave (marco de referencia S') que se mueve con una rapidez $v = 0.8c$ con respecto al marco S, donde se encuentra Jane, la gemela de Dick), entonces según Jane, el corazón de su gemelo se enlentece en un factor de 0.6 con respecto al corazón de ella.

✓ $0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

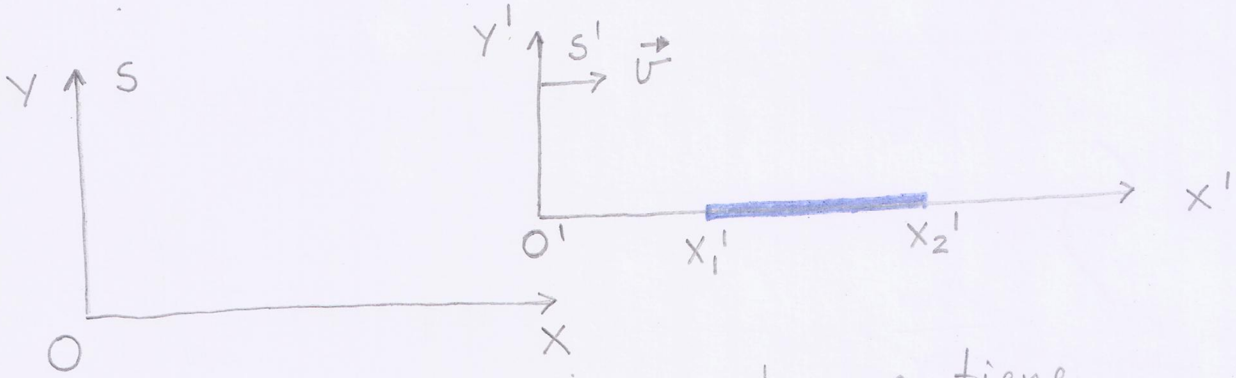
✓ Asumiendo que Dick y Jane son gemelos perfectos, por cada 5 latidos del corazón de Jane se producirán 3 latidos en el corazón de Dick.

✓ Dick envejece más lentamente que su gemela Jane!

Lectura : Concepts of Modern Physics, Arthur Beiser, Ed. 6, pag. 17, Sección 1.5, Twin Paradox.

Contracción de la longitud

✓ Supongamos que tenemos una varilla en reposo en S' a lo largo del eje x'.



✓ De las transformaciones de Lorentz se tiene

$$x_1' = \gamma(x_1 - v t_1) \quad (1)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - v t_2) \quad (2)$$

✓ Las coordenadas x_1' y x_2' (ancladas a S') representan los extremos de la varilla medidos desde S'.

✓ Las coordenadas x_1 y x_2 son medidas desde S simultáneamente por relojes situados (en S) en x_1 y x_2. Esto quiere decir que $t_1 = t_2$.

$$\Rightarrow \quad x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\gamma} \qquad (3)$$

Como $\gamma > 1$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_1 < x_2' - x_1' \qquad (4)$$

(longitud propia)

✓ La longitud de un cuerpo es máxima cuando el observador (en el sistema S' en este caso) que la mide está en reposo con respecto al cuerpo $(x_2' - x_1')$.

✓ Cuando el observador se mueve a una velocidad de magnitud v con respecto al cuerpo, la longitud del cuerpo medida por este observador en la dirección de su movimiento es menor que la que mide un observador en reposo con respecto al cuerpo.

Esto es

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1')$$

$$\Rightarrow \quad x_2 - x_1 = \sqrt{1-(v/c)^2}\,(x_2' - x_1') \qquad (5)$$

Definir $\quad x_2' - x_1' = L_0 \qquad (6)$

$\qquad\quad x_2 - x_1 = L \qquad (7)$

$$\Rightarrow \quad L = \sqrt{1-(v/c)^2}\; L_0 \qquad (8)$$

$L < L_0$ (Contracción de la longitud)

✓ Las dimensiones perpendiculares a la dirección del movimiento no son afectadas (lectura futura)

✓ L_0 = longitud propia (longitud medida desde un marco de referencia en el que el cuerpo "observado" está en reposo)

✓