LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\,\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \qquad (1)$$

Separación de variables : $\Psi(x,t) = \psi(x)\,\varphi(t)$ (2)

Siempre que $U(x,t)$ no depende del tiempo, se cumple la ecuación (2).

Supongamos entonces que $U = U(x)$ (3).

(2) y (3) en (1) =>

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)\varphi(t)}{\partial x^2} + U(x)\,\psi(x)\varphi(t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x)\varphi(t)}{\partial t} \qquad (4)$$

$$\varphi(t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\right) + U(x)\,\psi(x)\varphi(t) = i\hbar\,\psi(x)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} \qquad (5)$$

Dividiendo (5) entre $\psi(x)\,\varphi(t)$

$$\frac{1}{\psi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\right) + U(x) = i\hbar\frac{1}{\varphi(t)}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} \qquad (6)$$

El lado derecho de la ecuación (6) no depende de x y el lado izquierdo no depende de t.

De acuerdo a la ecuación (6), ambos lados son iguales, esto es :

$$\frac{1}{\psi(x)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\right) + U(x) = G \qquad (7)$$

y

$$i\hbar\frac{1}{\varphi(t)}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = G \qquad (8)$$

Como G no puede depender ni de x ni de t, entonces G es una constante (independiente simultáneamente de x y t)

(8) $\Rightarrow$ $$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = -i \frac{G}{\hbar} \varphi(t) \qquad (9)$$

Sabemos que la solución de esta ecuación es

$$\varphi(t) = e^{-i\frac{G}{\hbar}t} = e^{-i\frac{2\pi G}{h}t} \qquad (10)$$

Es claro que $\varphi(t)$ es una función oscilatoria en t con frecuencia $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{G}{h}$ $\Rightarrow$

$$\nu = \frac{G}{h} \qquad (11)$$

Pero sabemos que $\nu = \frac{E}{h}$ de modo que la constante G es la energía de la partícula.

$$G = E \qquad (12)$$

(12) en (7):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \qquad (13)$$

En realidad, en la ecuación (13) podemos escribir la derivada parcial como derivada normal

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \qquad (14)$$

La ec. (14) se denomina ecuación de Schrödinger independie[nte] del tiempo. Hay que tener presente que

$$\Psi(x,t) = \Psi(x)\,\varphi(t) = \Psi(x)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \qquad (15)$$

La ecuación (14) no contiene el número imaginario i y por lo tanto sus soluciones $\Psi(x)$ no necesariamente son funciones complejas.

$\Psi(x)$ = eigenfunciones

eigen en alemán quiere decir "característica".

Luego se entenderá por qué el adjetivo característico es importante.