PR-6.01. *Ondas de una bala y de un electrón*

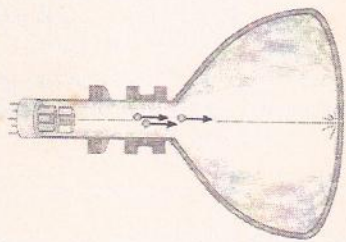
Determine la longitud de onda de de Broglie de:
a) Una bala de masa 4,2 g que es disparada por un rifle con una velocidad de 965 m/s.
b) Los electrones en un aparato de TV a color que son acelerados desde reposo por una diferencia de potencial de 36000 voltios.

Solución: a) Para la bala de masa m que viaja con velocidad v, la longitud de onda de de Broglie es:

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}=\frac{6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}}{(0{,}0042\text{kg})(965\text{m/s})}=1{,}64\text{x}10^{-34}\,\text{m}$$

Esta longitud de onda es sumamente pequeña y por ello el comportamiento ondulatorio de la bala es inobservable.

b) Cuando en el tubo de TV el electrón se acelera desde el reposo a través de la diferencia de potencial V, su perdida de energía potencial $eV =$ 20 keV es igual a su ganancia de energía cinética. Por ser esta mucho menor que su energía en reposo (m_0c^2=511 keV), podemos usar la formula clásica para el momentum $p = mv$, por lo tanto:



$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}=eV \quad\Rightarrow\quad p=\sqrt{2meV}$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2meV}}=\frac{6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}}{\sqrt{2(9{,}11\text{x}10^{-31})(1{,}6\text{x}10^{-19})(2{,}0\text{x}10^{4})}}$$

$$\lambda=8{,}7\text{x}10^{-12}\ \text{m}$$

Respuesta:

a) Bala: $\lambda=1{,}64\text{x}10^{-34}\,\text{m}$
b) Electrón: $\lambda=8{,}7\text{x}10^{-12}\ \text{m}$

PR-6.03. *λ de Broglie para partículas relativistas*

a) Demuestre que la longitud de onda de de Broglie de una partícula que tiene energía en reposo m_0c^2 y energía cinética K, es:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(K+2m_0c^2)}}$$

b) Demuestre que para el fotón se obtiene: $\lambda = c/f$.
b) Halle la longitud de onda de electrones cuya energía cinética es dos veces su energía en reposo.

Solución: a) El momentum del electrón está relacionado con su energía relativista:

$$E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-(m_0c^2)^2}$$

La longitud de onda es:

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{hc}{\sqrt{E^2-(m_0c^2)^2}}=\frac{hc}{\sqrt{(K+m_0c^2)^2-(m_0c^2)^2}}$$

$$=\frac{hc}{\sqrt{(K+m_0c^2+m_0c^2)(K+m_0c^2-m_0c^2)}}=\frac{hc}{\sqrt{K(K+2m_0c^2)}}$$

b) Un fotón tiene masa en reposo nula, $m_0c^2=0$ y su energía es puramente cinética, por lo tanto:

$$\lambda=\frac{hc}{\sqrt{K(K+2m_0c^2)}}=\frac{hc}{K}=\frac{hc}{hf}=\frac{c}{f}$$

b) Para un electrón de energía cinética $K=2m_0c^2$, la longitud de onda es:

$$\lambda=\frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2(2m_0c^2+2m_0c^2)}}=\frac{h}{\sqrt{8}m_0c}$$

$$\lambda=\frac{6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}}{\sqrt{8}(9{,}11\text{x}10^{-31})(3{,}0\text{x}10^{8}\,\text{m/s})}=8{,}60\text{x}10^{-13}\text{m}$$

Respuesta:

a) $\lambda=\dfrac{hc}{\sqrt{K(K+2m_0c^2)}}$

b) Fotón: $\lambda=c/f$

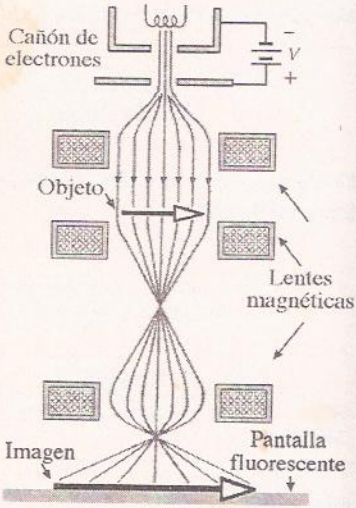
c) Electrón: $\lambda=8{,}60\text{x}10^{-13}\text{m}$

PR-6.05. ***La resolución de un microscopio electrónico***

En un microscopio electrónico de transmisión, un haz de electrones es emitido por un filamento caliente y luego es acelerado por una gran diferencia de potencial para hacerlo incidir sobre una delgada rebanada del material a examinar. Se usan bobinas de desviación magnética que actúan como lentes para controlar el haz de electrones y así enfocar la imagen ampliada sobre una pantalla fluorescente de observación. Las ondas asociadas con los electrones establecen un limite del poder de resolución

a) ¿Cuál es límite teórico de resolución para un microscopio electrónico que usa un voltaje acelerador de 50 kilovoltios?

b) ¿Cómo se compara su resolución con la de un microscopio óptico?



Solución: Los electrones acelerados por una diferencia de potencial V adquieren una energía cinética:

$$K = eV = (1{,}6\text{x}10^{-19}\text{C})(50\text{x}10^{3}\text{V}) = 8{,}0\text{x}10^{-15}\text{J}$$

Para hallar la longitud de onda de los electrones usamos la fórmula relativista hallada en el problema PR-6.03:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2m_0c^2)}}$$

$$\lambda = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34})(3{,}0\text{x}10^{8})}{\sqrt{8{,}0\text{x}10^{-15}(8{,}0\text{x}10^{-15} + 2(9{,}11\text{x}10^{-31})(3{,}0\text{x}10^{8})^2)}}$$

$$\lambda = 5{,}4\text{x}10^{-12}\ \text{m}$$

b) Debido principalmente a limitaciones impuestas por la difracción, cualquier microscopio sería capaz de detectar detalles que, en teoría, son comparables en tamaño de la longitud de onda de la radiación utilizada para iluminar el objeto. Puesto que para un fotón de luz visible la longitud de onda es cerca de $\lambda \approx 500\text{nm}$ mientras que para los electrones, $\lambda \approx 5\text{x}10^{-3}\text{nm}$, la resolución teórica de este microscopio electrónico resulta del orden de 10^5 veces mejor que la del microscopio óptico. En la práctica, debido a las imperfecciones de las lentes magnéticas, la mejor resolución que puede obtenerse con un microscopio electrónico es del orden de 0,5 nm.

Un microscopio electrónico es mas apropiado que un microscopio óptico para ver objetos de tamaño atómico

Respuesta:

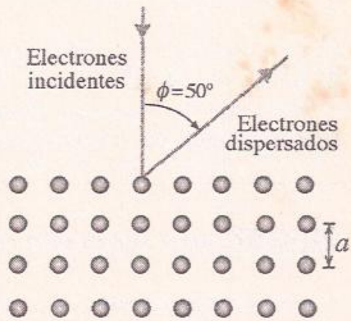
a) $\lambda = 5{,}4\text{x}10^{-12}$ m
b) 10^5 veces mejor que el microscopio óptico

PR-6.06. *Difracción de electrones por un cristal*

En el experimento de Davisson y Germer, se hizo incidir un fino haz de electrones de 54 eV sobre una cara de un cristal cúbico. Se observó un fuerte máximo de difracción a un angulo $\phi = 50°$ respecto al haz incidente. Se sabe por difracción de rayos *x* que el espaciamiento de la red del cristal es $a = 2{,}15\text{x}10^{-10}$m.

a) Suponga que los electrones se difractan como ondas y determine su longitud de onda utilizando la ley de Bragg.

b) Compruebe que la λ calculada en (a) coincide con la longitud de onda de de Broglie de los electrones.

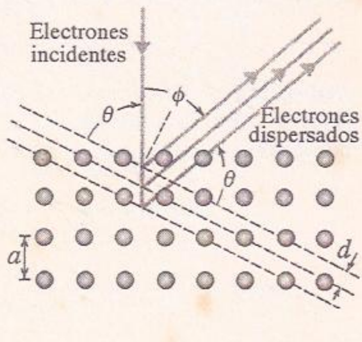


Solución: Debido a la simetría que debe existir a cada lado de la perpendicular a los planos difractantes (ángulo incidencia = ángulo reflexión = $\phi/2$), estos corresponden al espaciamiento interplanar *d,* mostrado. De acuerdo a la ley de Bragg:

$$2dsen\theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Donde el ángulo θ se halla de la relación:

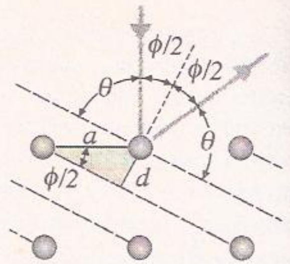
$$\phi + 2\theta = 180° \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{180°\text{-}\phi}{2} = \frac{180°\text{-}50°}{2} = 65°$$



También se observa que el espaciamiento *d* esta relacionado con *a*:

$$d = asen\frac{\phi}{2} = (2{,}15\text{x}10^{-10}\text{m})sen25° = 0{,}91\text{x}10^{-10}\text{m}$$

Podemos demostrar que el máximo corresponde al primer orden de difracción, $m = 1$ (ver el problema siguiente). Sustituyendo en la ley de Bragg, se obtiene una longitud de onda:



$$\lambda_a = \frac{2d sen\theta}{m} = \frac{2(0{,}91\text{x}10^{-10}\text{m}) sen 65^\circ}{1} = 1{,}65\text{x}10^{-10}\text{m}$$

b) La longitud de onda de de Broglie para electrones de energia cinética $K = eV$, es:

$$\lambda_b = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

$$\lambda_b = \frac{6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}}{\sqrt{2(9{,}11\text{x}10^{-31}\text{kg})(1{,}6\text{x}10^{-19}\text{C})54\text{V}}} = 1{,}67\text{x}10^{-10}\text{m}$$

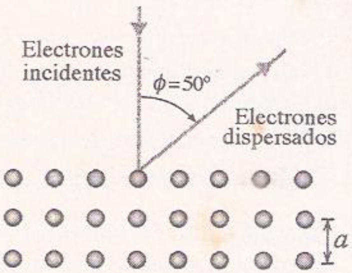
Este valor de la longitud de onda calculada por la formula de de Broglie concuerda muy bien con el hallado en el experimento de Davisson-Germer, y muestra evidencia del comportamiento ondulatorio de los electrones.

Respuesta:

a) Bragg: $\lambda_a = 1{,}65\text{x}10^{-10}\text{m}$
b) Broglie: $\lambda_b = 1{,}67\text{x}10^{-10}\text{m}$

PR-6.07. *Difracción de electrones para ordenes m >1*

a) En el experimento del problema anterior, para electrones de 54 eV que inciden sobre un cristal de níquel, demuestre que el fuerte máximo de difracción que se observa a un ángulo $\phi = 50^\circ$, no puede corresponder a difracción de segundo orden o más.
b) ¿Qué voltaje de aceleración se necesita para producir un haz difractado de segundo orden a un ángulo $\phi = 50^\circ$?



Solución: a) Suponiendo la longitud de onda de de Broglie para los electrones, la ley de Bragg predice difracción a ángulos dados por:

$$2d sen\theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$sen\theta = m\frac{\lambda}{2d} = m\frac{1{,}65\text{x}10^{-10}\text{m}}{2(0{,}91\text{x}10^{-10}\text{m})} = 0{,}906m$$

La única solución posible es para el entero $m = 1$, ya que valores superiores requieren que: $sen\theta > 1$.

b) La longitud de onda de los electrones que se difractan a un ángulo $\phi = 50^\circ$ en segundo orden sería:

$$\lambda = \frac{2dsen\theta}{m} = \frac{2(0{,}91\text{x}10^{-10}\text{m})sen65^\circ}{2} = 8{,}25\text{x}10^{-11}\text{m}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{h^2}{2me\lambda^2}$$

Por lo tanto, el voltaje requerido para acelerar los electrones es:

$$V = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34})^2}{2(9{,}11\text{x}10^{-31})(1{,}6\text{x}10^{-19})(8{,}25\text{x}10^{-11})^2} = 222\text{V}$$

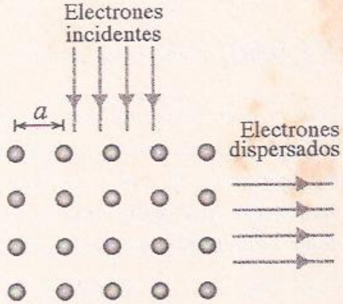
Respuesta:

b) V = 222 voltios

PR-6.08. *Difracción de electrones a ángulo recto*

Un haz de electrones que contiene energías cinéticas en el rango de 50 eV a 200 eV incide sobre una cara de un cristal cúbico cuya distancia entre átomos adyacentes es a = 0,3 nm.

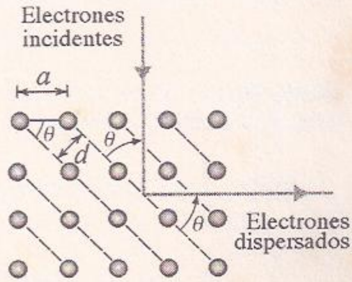
Determine las energías cinéticas de los electrones del haz que se difractarán a un ángulo recto en el cristal.



Solución: Si los electrones salen dispersados a 90º, la familia de los planos difractantes deben estar orientados a 45º respecto al haz incidente y la distancia interplanar es $d = a/\sqrt{2}$. Aplicando la ley de Bragg:

$$2dsen\theta = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$2\frac{a}{\sqrt{2}}sen45^\circ = n\lambda \quad \Rightarrow \quad 2\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{a}{n}$$



La energía cinética correspondiente a cada orden n se determina a partir de la longitud de onda correspondiente:

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = n\frac{h}{a} \qquad \Rightarrow \qquad K_n = \frac{p_n^2}{2m} = n^2\frac{h^2}{2ma^2}$$

$$K_n = n^2\frac{(6{,}63\text{x}10^{-34})^2}{2(9{,}11\text{x}10^{-31})(3{,}0\text{x}10^{-10})^2} = n^2(2{,}68\text{x}10^{-18}\text{J})$$

$$K_n = n^2(\frac{2{,}68\text{x}10^{-18}\text{J}}{1{,}6\text{x}10^{-19}\text{J/eV}}) = 16{,}8n^2\text{eV}$$

El rango de energías cinéticas de los electrones incidentes es de 50 eV a 200 eV, luego la condición que debe cumplir el numero n es: $50 < 16,8n^2 < 200$,

$$2,98 < n^2 < 11,9 \qquad \Rightarrow \qquad 1,73 < n < 3,45$$

Como n debe ser un número entero, los órdenes que se deben observar en el haz difractado a este ángulo son:

$n = 2$ cuando la energía es: $K_2 = 16,8(2)^2 = 67,2\text{eV}$

$n = 3$ cuando la energía es: $K_3 = 16,8(3)^2 = 151,2\text{eV}$

Respuesta:

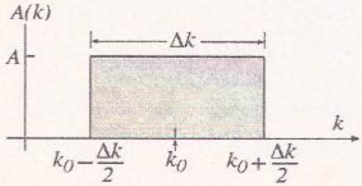
$$\boxed{\begin{array}{ll} n=2: & K_2 = 67,2\text{eV} \\ n=3: & K_3 = 151,2\text{eV} \end{array}}$$

PR-6.09. *Cómo se construyen paquetes de ondas*

Podemos construir un pulso o paquete de onda mediante la superposición de un gran número de ondas sinusoidales de longitudes de onda diferentes con una distribución de amplitudes apropiadas $A(k)$. Tal superposición se lleva a cabo mediante la integral de Fourier:

$$\psi(x) = \int A(k)\cos(kx)dk$$

Siendo el número de onda $k = 2\pi/\lambda$. Suponga que las ondas a superponer son de amplitud constante, $A(k) = A$ y cubren un intervalo de número de onda $(k_0 \pm \Delta k/2)$.



a) Determine la forma de la función resultante: $\psi(x)$

b) Escoja un valor conveniente del ancho Δx y demuestre que se cumple la relación: $\Delta x \Delta k \approx 1$

Solución: a) Si se sustituye la función $A(k)$ en la integral de Fourier, se obtiene:

$$\Psi(x) = \int A(k)\cos(kx)dk = A\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \cos(kx)dk$$

$$\Psi(x) = A\frac{senkx}{x}\Bigg|_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}}$$

$$\Psi(x) = \frac{A}{x}[\,senx(k_0+\frac{\Delta k}{2}) - senx(k_0-\frac{\Delta k}{2})]$$

$$\Psi(x) = \frac{A}{x}[\,senk_0x\cos\frac{x\Delta k}{2} + \cos k_0xsen\frac{x\Delta k}{2} - (senk_0x\cos\frac{x\Delta k}{2} - \cos k_0xsen\frac{x\Delta k}{2})]$$

$$\Psi(x)=\frac{2A}{x}(\cos k_0 x)sen(\frac{x\Delta k}{2})$$

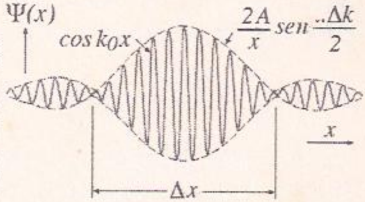
b) Si tomamos como distancia mínima Δx, a aquella comprendida entre los puntos consecutivos donde se anula la envolvente, $sen(x\Delta k/2)=0$, entonces se cumple: $x\Delta k/2=\pm\pi$

$$\Delta x=\frac{2\pi}{\Delta k}-(-\frac{2\pi}{\Delta k})=\frac{4\pi}{\Delta k}$$

Por lo tanto:

$$\Delta x\Delta k=4\pi$$

Vemos que el ancho Δx de $\psi(x)$ en el bucle central resulta inversamente proporcional a Δk.

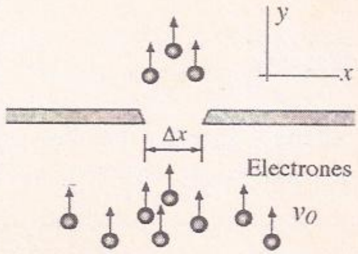


Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{l}\psi(x)=\frac{2A}{x}(\cos k_0 x)sen(\frac{x\Delta k}{2}) \\ \text{b) } \Delta x\Delta k\geq 4\pi\end{array}}$$

PR-6.10. *El Dr. Heisenberg no estaba equivocado*

Un haz de electrones se mueve verticalmente con una velocidad definida v_0 y un experimentalista pretende demostrar que Heisenberg estaba equivocado. Coloca una estrecha rendija en el plano horizontal, esperando obtener así un haz colimado de ancho Δx, constituido por electrones de velocidad perfectamente definida como el haz original. Demuestre que este intento está condenado a fracasar, por la restricción: $\Delta p_x \Delta x \approx h$, que es justamente consistente con el principio de incertidumbre.



Solución: Para estrechar el haz de electrones se le bloquea con una pantalla provista de una abertura de ancho Δx, la cual podemos escoger tan pequeña como se desee. Pero resulta que el haz de electrones, por comportarse como ondas, se difracta. En efecto, si se cuenta el numero de electrones por minuto que llegan a detectores colocados a una distancia y, se obtendrá un patrón de difracción típico con un máximo central y mínimos a cada lado. La velocidad v_x puede tomar valores positivos o negativos y su promedio es cero (en el centro de la pantalla). Existe un valor particular de v_x para el cual el electrón pega en la pantalla justamente en el lugar del primer mínimo del patrón de difracción. Vamos a tomar, de manera arbitraria, este valor de la velocidad horizontal como su incertidumbre y lo llamamos Δv_x.

Según vimos en el capitulo 4, el primer mínimo de difracción ($m = 1$) ocurre a un ángulo dado por:

$$\Delta x sen\theta = \lambda_0$$

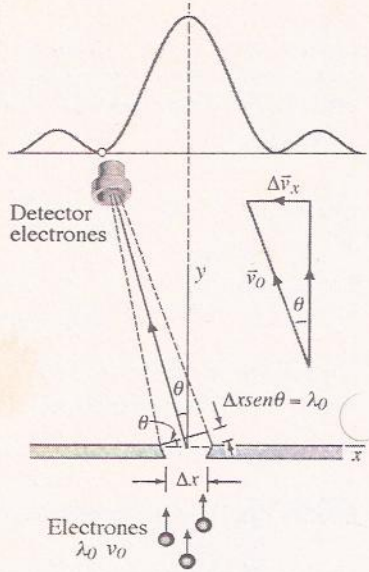
Por otra parte, del triángulo rectángulo formado por los vectores $\bar{v}_0$ y $\Delta\bar{v}_x$ se deduce que: $sen\theta \approx tg\theta \approx \Delta v_x / v_0$ para θ pequeño, por lo tanto:

$$\Delta x \frac{\Delta v_x}{v_0} \approx \lambda_0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x \frac{m\Delta v_x}{mv_0} \approx \lambda_0$$

Ahora bien, $\Delta p_x = m\Delta v_x$ y $p_0 = mv_0$, mientras que λ_0 la longitud de onda de de Broglie es igual a h/p_0. Sustituyendo:

$$\Delta x \frac{\Delta p_x}{p_0} \approx \lambda_0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x \Delta p_x \approx \lambda_0 p_0 = h$$

Esta expresión muestra la imposibilidad de hacer al mismo tiempo, determinaciones exactas de la coordenada, x, del electrón y del correspondiente momentum, p_x. Este resultado es similar (salvo el factor 2π) a la relación de incertidumbre de Heisenberg, $\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$.



Respuesta:

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \approx h}$$

PR-6.11. *Incertidumbre al dejar caer una pelota*

H

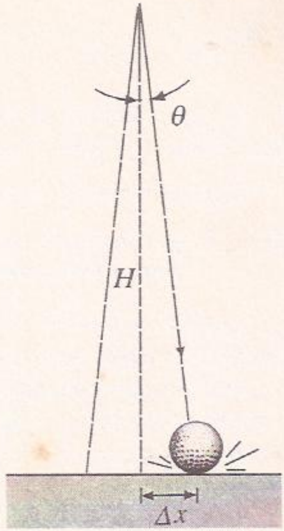
Un estudiante que se encuentra en lo alto de un edificio, deja caer una pelota de golf de masa $m = 0{,}0459$ kg, desde una altura $h = 32$ m, para que caiga justo en una grieta que está abajo en el piso de la acera. Demuestre que, por mas sofisticado que sea su equipo para apuntar hacia el blanco con la precisión máxima posible, los centros de las bolas fallarán la grieta en una distancia de al menos:

$$\Delta x = \left(\frac{h}{2\pi m}\right)^{1/2}\left(\frac{H}{2g}\right)^{1/4}$$

Solución: Según el principio de Heisenberg el producto de las incertidumbres de la posición y el momentum en la dirección horizontal tiene un mínimo dado por:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

Cuando la pelota llega al suelo, la incertidumbre en el momentum es:



$$\Delta p_x = m\Delta v_x = mv sen\theta = mv\frac{\Delta x}{H}$$

$$\Delta x(mv\frac{\Delta x}{H}) = \frac{h}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad (\Delta x)^2 = \frac{hH}{2\pi mv}$$

Para el movimiento en caída libre se tiene:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \qquad v = gt \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gH}$$

Por lo tanto, la incertidumbre en la posición de la pelota es:

$$(\Delta x)^2 = \frac{hH}{2\pi m\sqrt{2gH}} = \frac{h}{2\pi m}\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

$$\Delta x = (\frac{h}{2\pi m})^{1/2}(\frac{H}{2g})^{1/4}$$

Sustituyendo los valores numéricos, encontramos:

$$\Delta x = [\frac{6,63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s}}{2\pi(0,0459\text{kg})}]^{1/2}[\frac{36\text{m}}{2(9,80\text{m.s}^{-2})}]^{1/4} \approx 5,6\text{x}10^{-17}\text{m}$$

Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta x = (\frac{h}{2\pi m})^{1/2}(\frac{H}{2g})^{1/4} \\ \Delta x \approx 5,6\text{x}10^{-17}\text{m}\end{array}}$$

PR-6.12. *Sería muy difícil jugar béisbol en ese mundo*

Imagínese un juego de béisbol en un mundo hipotético donde la constante de Planck no es $h = 6,63\text{x}10^{-34}$ J.s sino que vale 6,63 J.s. ¿Cuál sería la indeterminación de la posición de una pelota de béisbol de masa m = 0,145 kg que se mueva a una velocidad de 20 m/s con una incertidumbre en la velocidad del 5%?

Solución: El momentum de la pelota de béisbol es:

$$p_x = mv_x = (0,145\text{kg})(20\text{m/s}) = 2,90\text{kg kg.m/s}$$

La imprecisión, Δp_x en el momentum es del 5%, es decir:

$$\Delta p_x = 0,05\text{x}2,90\text{kg.m/s} = 0,145 \text{ kg.m/s}$$

La incertidumbre en la posición es, entonces:

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{h}{2\pi\Delta p_x} = \frac{6{,}63\text{J.s}}{2\pi(0{,}145\text{kg.m/s})} = 7{,}28 \text{ m}$$

Con esta incertidumbre de 7,28 metros, sería como una pesadilla tratar de atrapar esa pelota.

Respuesta:

$\boxed{\Delta x \approx 7{,}28 \text{ m}}$

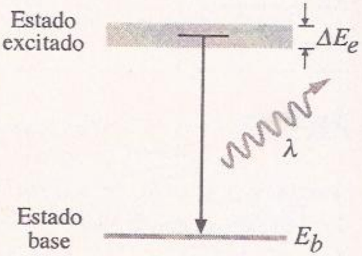
PR-6.13. *Por causa del principio de incertidumbre las líneas de un espectro atómico se ensanchan*

Un átomo que está en un estado estacionario excitado, después de un cierto tiempo sufrirá una transición hacia otro estado de menor energía. Suponga que su tiempo de vida media en el estado excitado es de 10^{-8}s antes de caer al estado base, emitiendo un fotón de longitud de onda λ = 500 nm.

Utilice el principio de incertidumbre para determinar el ancho de la línea $\Delta\lambda$.

Solución: La energía del átomo tiene una incertidumbre ΔE que depende del intervalo de tiempo Δt durante el cual permanece en ese estado, a través de la relación de Heisenberg: $\Delta E\Delta t \geq \hbar$. Para el estado fundamental, la energía se conoce exactamente $\Delta E_0 = 0$ porque su tiempo de vida es infinito, $\Delta t_0 = \infty$. Para el estado excitado:

$$\Delta E_n \Delta t_n \geq \hbar$$



Al caer al estado base, la longitud de onda del fotón emitido es:

$$E_n - E_0 = \frac{hc}{\lambda}$$

Como E_0 es constante, si derivamos: $dE_n = -\dfrac{hc}{\lambda^2}d\lambda$

Tomando $dE_n \cong \Delta E_n$, se tiene:

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2}d\lambda = \frac{\hbar}{\Delta t_n}$$

Despejando, obtenemos el ancho de la línea:

$$|\Delta\lambda| \cong \frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t_n} = \frac{(500\text{x}10^{-9}\text{m})^2}{2\pi(3\text{x}10^8\text{m/s})(10^{-8}\text{s})} = 1{,}33\text{x}10^{-5}\text{nm}$$

Esta mínima anchura natural inherente al principio de incertidumbre es, por lo general inobservable, porque es opacada por el efecto mucho mayor del ensanchamiento debido a otras causas como el efecto Doppler o las colisiones atómicas.

Respuesta:

$\boxed{\Delta\lambda \cong 1{,}33\text{x}10^{-5}\text{nm}}$

PR-6.14. *La menor energía del átomo de hidrógeno*

Estimar, con ayuda del principio de incertidumbre, la menor energía posible del electrón del átomo de hidrógeno y su respectiva distancia al núcleo.

Solución: Escribamos la energía del electrón sujeto a la fuerza de Coulomb del protón en el átomo de hidrógeno:

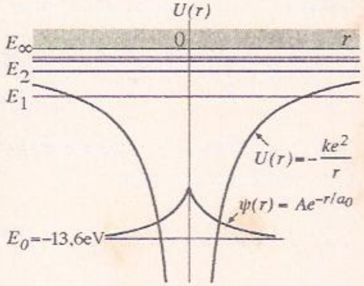
$$E = K + U(r) = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{r}$$

Donde m y e son, respectivamente, la masa y la carga del electrón y $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ la constante de la ley de Coulomb. Suponiendo que la incertidumbre en la posición en una dimensión es $\Delta r = R$, de acuerdo a la relación $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, la incertidumbre en el momentum es: $\Delta p \geq \hbar / R$. Por lo tanto, el valor mínimo de la energía obedece la relación:

$$E(R) = \frac{(\hbar/R)^2}{2m} - \frac{ke^2}{R}$$

El valor de R que minimiza esta función se halla a partir de la condición $dE/dR = 0$:

$$\frac{dE(R)}{dR} = -\frac{\hbar^2}{mR^3} + \frac{ke^2}{R^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{\hbar^2}{kme^2}$$



Con este valor de R, encontramos la mínima energía:

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{kme^2}{\hbar^2}\right)^2 - ke^2\,\frac{kme^2}{\hbar^2} = -\frac{1}{2}\frac{k^2me^4}{\hbar^2}$$

$$E_0 = -\frac{2{,}18\text{x}10^{-18}\,\text{J}}{1{,}6\text{x}10^{-19}\,\text{J/eV}} = -13{,}6\text{eV}$$

Mientras que la mínima distancia del electrón al núcleo es:

$$R_0 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = \frac{(6{,}62\text{x}10^{-34}/2\pi)^2}{(9\text{x}10^9)(9{,}11\text{x}10^{-31})(1{,}6\text{x}10^{-19})^2}$$

$$R_0 = 0{,}53\text{x}10^{-10}\text{m}$$

Aunque estas son solo estimaciones de E_0 y de R_0 en base al principio de incertidumbre, se observa que estos resultados son bastante próximos a lo valores correctos que habíamos obtenido a partir del modelo de Bohr.

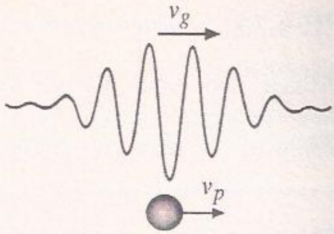
Respuesta:

$$E_0 = -\frac{1}{2}\frac{k^2me^4}{\hbar^2} = -13{,}6\text{eV}$$

$$R_0 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0{,}53\text{x}10^{-10}\text{m}$$

PR-6.15. *Velocidades de la partícula y del grupo*

Una partícula en movimiento esta descrita por un paquete de ondas, resultante de la superposición de un numero grande de ondas dentro de un cierto intervalo de λ. Demuestre que la velocidad de la partícula es igual a la velocidad de grupo del correspondiente paquete de ondas.



Solución: En el problema PR-2.35, vimos que la velocidad de la envolvente de un paquete de ondas (velocidad de grupo) es: $v_g = d\omega / dk$. Recordando que la frecuencia angular y el numero de ondas son, respectivamente:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{E}{h}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h}$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos una expresión para la velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = (\frac{d\omega}{dE})(\frac{dE}{dp})(\frac{dp}{dk}) = \frac{2\pi}{h}(\frac{dE}{dp})\frac{h}{2\pi} = \frac{dE}{dp}$$

a) Si la partícula de masa m y velocidad v, es *n o relativista,* solo la energía cinética depende del momentum: $p = mv$, por lo tanto:

$$K = \frac{p^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{dK}{dp} = \frac{2p}{2m} = v$$

b) Si la partícula es *relativista*, la relación entre la energía E y el momentum p es:

$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2 \qquad \Rightarrow \qquad E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2}$$

Por lo tanto, la velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}[\sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2}] = \frac{pc^2}{\sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2}}$$

$$v_g = \frac{pc^2}{E} = \frac{c^2(m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2})}{m_0c^2/\sqrt{1-(v/c)^2}} = v$$

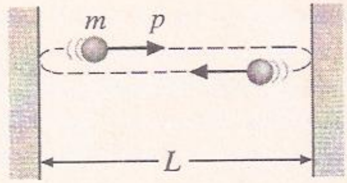
El hecho de que la velocidad de grupo sea igual a la velocidad de la partícula en ambos casos, permite conciliar los dos aspectos de su comportamiento que serían aparentemente incompatibles: onda y materia.

Respuesta:

Velocidad del grupo de ondas = Velocidad de la partícula
$v_g = v_p$

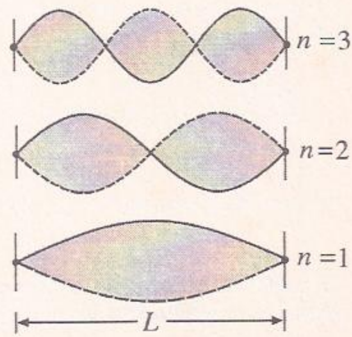
PR-6.16. *Incertidumbre de una partícula en una caja*

Sea una partícula de masa m, confinada a moverse en una caja unidimensional de ancho L, rebotando entre dos paredes perfectamente rígidas. Por analogía con las ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos, determine los niveles de energía de los estados estacionarios de la partícula y demuestre que el resultado es coherente con el principio de incertidumbre.



Solución: Si las paredes son impenetrables, es de esperar que las funciones de onda para la partícula $\psi(x)$ sean nulas fuera de la caja y por continuidad deben ser igual a cero en las paredes. Es decir, deben ser ondas estacionarias tales que algún múltiplo entero de medias longitudes de onda caben en la longitud L de la caja:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$



Como la partícula rebota elásticamente en las paredes, la magnitud de su momentum es constante y su valor queda restringido a valores específicos de la longitud de onda de de Broglie:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L/n} = \frac{nh}{2L}$$

La energía (cinética) de la partícula en estos estados estacionarios está cuantizada y sus valores son:

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{(nh/2L)^2}{2m} = (\frac{h^2}{8mL^2})n^2 \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

De acuerdo a esta expresión, la mínima energía que puede tener la partícula corresponde al estado base (n =1) y es no nula: $E_1 = h^2/8mL^2$. Lo que significa que la partícula nunca puede estar en reposo, como consecuencia de su confinamiento en la caja. La partícula puede estar en cualquier parte en la caja y la incertidumbre en su posición es $\Delta x = L$. Como no se sabe si está viajando hacia la derecha o hacia la izquierda, podemos suponer que la incertidumbre en su momentum es $\Delta p = 2p$. Bajo estas circunstancias el producto de las incertidumbres sería:

$$\Delta x \Delta p \approx L(2p) = 2L\sqrt{2mE} = 2L\sqrt{2m\frac{h^2}{8mL^2}} = h$$

Este valor está dentro del límite establecido por el principio de incertidumbre $\Delta x \Delta p \geq \hbar$.

Respuesta:

a) $E_n = (\dfrac{h^2}{8mL^2})n^2$
$n = 1, 2, 3, \ldots$
b) Mínimo: $\Delta x \Delta p \approx h$