(Problema Principio de incertidumbre)

Un átomo de hidrógeno tiene un radio de 0.53 Å. Utilice el principio de incertidumbre para determinar la energía mínima de un electrón que exista dentro de un átomo de hidrógeno. ¿Qué indica este resultado en relación a la existencia del electrón dentro de un átomo?

$$\Delta x = R = 0.53\ \text{Å}$$

$$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \qquad (\Delta p)_{min} = \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \qquad K_{min} \approx \frac{(\Delta p)^2_{min}}{2m}$$

$$K_{min} \simeq \frac{(\Delta p)^2_{min}\, c^2}{2mc^2} = \frac{\left(\frac{\hbar^2}{4\Delta x^2}\right)c^2}{2\ mc^2} = \frac{(hc)^2}{32\pi^2 \Delta x^2\, mc^2}$$

$$K_{min} \simeq \frac{\left(\frac{hc}{\pi \Delta x}\right)^2}{32\ mc^2}$$

$$hc = 12.41 \times 10^3\ \text{eV}\cdot\text{Å}$$

$$mc^2 = 511\ \text{keV} = 511 \times 10^3\ \text{eV}$$

$$\frac{hc}{\pi \Delta x} = \frac{12.41 \times 10^3\ \text{eV}\cdot\text{Å}}{3.14159 \times 0.53\ \text{Å}} = 7453.26\ \text{eV}$$

$$K_{min} \simeq \frac{(7453.26\ \text{eV})^2}{32 \times 511 \times 10^3\ \text{eV}} =$$

Beiser Ejemplo 3.2, pag. 94

Encuentre la energía cinética de un protón cuya longitud de onda es 1.000 fm $= 1.000 \times 10^{-15}$ m.

$$E^2 = (pc)^2 + (m_o c^2)^2 \qquad (1)$$

$$E = K + m_o c^2 \qquad (2)$$

$$E = mc^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1-(v/c)^2}} c^2 \qquad (3)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (4)$$

$$E = h\nu \qquad (5)$$

a) Si $pc \ll m_o c^2$ entonces el cálculo no es relativista

b) Si $K \ll m_o c^2$ entonces el cálculo no es relativista

En este caso $pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.41 \times 10^3 \text{ eV.Å}}{1.000 \times 10^{-5} \text{ Å}} = 1.241 \times 10^9 \text{ eV}$

$= 1.241$ GeV

$$m_o c^2 = 0.938 \text{ GeV}$$

$\Rightarrow$ pc y $m_o c^2$ son comparables $\Rightarrow$ El cálculo es relativista

$(1) \Rightarrow E = \sqrt{(pc)^2 + (m_o c^2)^2} = 1.555$ GeV

$(2) \Rightarrow K = E - m_o c^2 = 1.555 \text{ GeV} - 0.938 \text{ GeV} = 0.617 \text{ GeV}$

$= 617$ MeV

Para estudiantes: Calcular v y ν. $(\nu\lambda \neq c)$

Beiser pag. 101

Velocidad de fase $v_{phase} = \dfrac{\omega}{k}$ (1)

Velocidad de grupo $v_{group} = \dfrac{d\omega}{dk}$ (2)

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi \frac{E}{h} = \frac{2\pi}{h}(mc^2) = \frac{2\pi}{h}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}c^2\right) \quad (3)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{(h/p)} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi m v}{h} = \frac{2\pi m_0 v}{h\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (4)$$

$$v_{phase} = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v} \qquad v_{phase} > c$$

v_{phase} no tiene significado físico en el sentido de que el movimiento del paquete de ondas, y no el movimiento de las ondas individuales que forman el paquete, es el que corresponde al movimiento de la partícula. v es la velocidad de la partícula.

Se puede probar que $v_{group} = v$ usando (2).

$$v_{group} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\frac{d\omega}{dv}}{\frac{dk}{dv}} = \frac{\dfrac{2\pi m_0 v}{h\left(1-(v/c)^2\right)^{3/2}}}{\dfrac{2\pi m_0}{h\left(1-(v/c)^2\right)^{3/2}}}$$

$$\Rightarrow \quad v_{group} = v$$

Beiser Ejemplo 3.3, pag. 103

Un electrón tiene una longitud de onda de De Broglie de 2.00 pm $= 2.00\times 10^{-12}$ m. Encuentre su energía cinética, velocidades de fase y de grupo.

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (1)$$

$$E = K + m_0 c^2 \quad (2)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (3)$$

$$v_{grupo} = v \quad (4)$$

$$v_{phase} = \frac{c^2}{v} \quad (5)$$

Respuestas:

$pc = 620$ keV

$m_0 c^2 = 511$ keV

$E = 803$ keV

$K = 292$ keV

$v = 0.771\, c$

$v_{grupo} = 0.771\, c$

$v_{fase} = 1.30\, c$

Krane Modern Physics, difracción de protones por núcleos de oxígeno, pag. 107, Ejemplo 4.2 (A)

Protones cuya energía cinética es 1 GeV son difractados por núcleos de oxígeno, los cuales tienen un radio de 3.0 fm produciendo un patrón de difracción como el que se muestra en la figura 4.8 (Ver Figura)

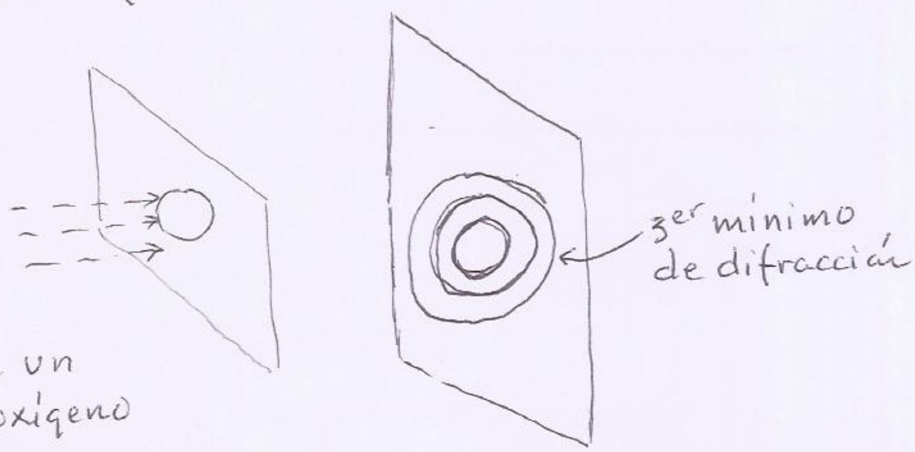
Calcule los ángulos donde ocurren los 3 primeros mínimos de difracción.

Solución: Difracción por una "abertura" (disco) circular
Documento "Difracción de ondas"

$a \operatorname{Sen}\theta_1 = 1.22\,\lambda$ (primer mínimo)

$a \operatorname{Sen}\theta_2 = 2.23\,\lambda$ (segundo mínimo) Sears-Zemansky Secc. 36.7 pag. 1253

$a \operatorname{Sen}\theta_3 = 3.24\,\lambda$ (tercer mínimo)



a = diámetro de un núcleo de oxígeno

$a = 2R = 6.0$ fm

Para encontrar θ_1, θ_2 y θ_3, hay que determinar primero λ.

(B)

¿Cómo?

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - (m_0c^2)^2} \qquad (1)$$

$$E = K + m_0c^2 \qquad (2)$$

Para protón $m_0c^2 = 0.94\ \text{GeV} \quad (3)$

Como $K = 1\ \text{GeV} \quad \Rightarrow \quad E = 1.94\ \text{GeV} \quad (\ )$

Con (3) y (4) en (1):

$$p = \frac{1.70\ \text{GeV}}{c} \quad (5) \quad \Rightarrow \quad pc = 1.70\ \text{GeV} \quad (5)'$$

Relación de De Broglie $\Rightarrow \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc}$

$$hc = 1240\ \text{MeV}\cdot\text{fm}$$

$$\lambda = \frac{1240\ \text{MeV}\cdot\text{fm}}{1.70 \times 10^3\ \text{MeV}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.73\ \text{fm}$$ (Dimensión nuclear)

$$\text{Sen}\,\theta_1 = \frac{1.22\,\lambda}{a} = \frac{1.22 \times 0.73\ \text{fm}}{6.0\ \text{fm}} = 0.148 \Rightarrow \theta_1 = 8.5^\circ$$

$$\text{Sen}\,\theta_2 = \frac{2.23\,\lambda}{a} = \frac{2.23 \times 0.73\ \text{fm}}{6.0\ \text{fm}} = 0.271 \Rightarrow (\theta_2)_{\text{Sears}} = 15.7^\circ$$

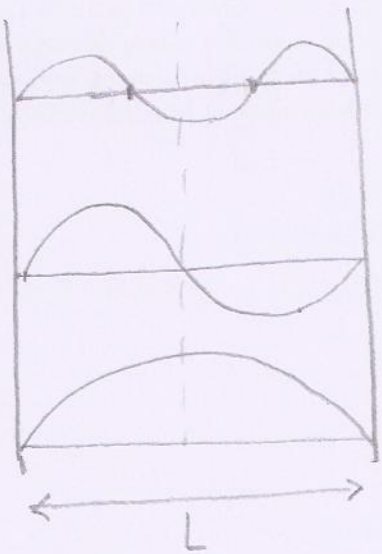
$$(\theta_2)_{\text{Krane}} = 17.2^\circ$$

???

Usando $a\,\text{Sen}\,\theta = 1.22\, n\,\lambda$ con $n = 2$

✓ Hacer problemas con Ley de Bragg

Beiser pag. 106, partícula en una caja 1-D



$\Rightarrow L = \frac{3}{2}\lambda_3$

$$L = \frac{n}{2}\lambda_n \quad (1)$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow L = \lambda_2$

$\Rightarrow L = \frac{\lambda_1}{2}$

Longitud de onda de De Broglie : $\lambda = \frac{h}{p}$ (2)

$$\Rightarrow p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{h}{(2L/n)} \quad (3)$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{nh}{2L} \quad (4)$$

La energía de la partícula (suponiendo el caso no es relativista)

$$E = K + U \quad (5)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U \quad (6)$$

U es constante dentro de la caja. Se selecciona $U = 0$.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(nh/2L)^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Beiser, pag. 112, Principio de incertidumbre

(A)

Se mide la posición de un protón con una incertidumbre de 1.00×10^{-11} m en $t=0$. Encuentre la incertidumbre del protón en $t = 1$ s.

En $t=0$ $\qquad (\Delta x)_0 = 1.00 \times 10^{-11}\, m \qquad (1)$

El principio de incertidumbre en $t=0$ dice que

$$(\Delta x)_0 (\Delta p_x)_0 \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (2)$$

$$(\Delta p_x)_0 \geq \frac{\hbar}{2(\Delta x)_0} \qquad (3)$$

Ya que $p_x = m v_x \Rightarrow \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \qquad (4)$

Usando (3) y (4) podemos escribir la incertidumbre en la rapidez de la partícula como

$$(\Delta v_x)_0 = \frac{(\Delta p_x)_0}{m} \geq \frac{\hbar}{2m(\Delta x)_0} \qquad (5)$$

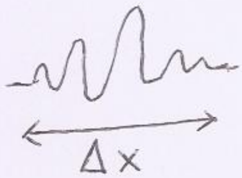
Si la dispersión de la velocidad del protón no cambia (posiblemente existe un haz de protones con dispersión de velocidad constante) entonces la incertidumbre en la velocidad Δv_x se mantiene en el tiempo y en ese caso

$$\Delta v_x = (\Delta v_x)_0 \qquad (6)$$

(5) y (6) $\Rightarrow$ $\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m(\Delta x)_0}$ para cualquier tiempo t posterior al inicial

(7)

a pesar de que Δv_x permanece constante, (B)
el paquete de ondas que representa al fotón



se ensancha al pasar el tiempo pues

$$\Delta x = (\Delta v_x)\, t \qquad (8)$$

(7) y (8) $\Rightarrow$ $$\Delta x = (\Delta v_x)\, t \geq \frac{\hbar\, t}{2m(\Delta x)_0} \qquad (9)$$

$$\Delta x \geq \frac{(1.054 \times 10^{-34}\ J.s)(1\ s)}{2\,(1.672 \times 10^{-27}\ kg)(1.00 \times 10^{-11}\ m)}$$

$$\Delta x \geq 3.15 \times 10^{3}\ m$$

$$\Delta x \geq 3.15\ km \qquad (10)$$

What ? Ver Fig. 3.16, pag. 113, Beiser.

o incertidumbre

Mientras mas pequeña es la dispersión de la posición de la partícula $(\Delta x)_0$ en el tiempo $t = 0$, o lo que es lo mismo : mientras el paquete de ondas que representa a la partícula en $t = 0$ tenga un ancho más pequeño, mayor será la dispersión o incertidumbre Δx de la partícula (o mayor será el ancho del paquete de ondas que la representa) en un tiempo t posterior al inicial.

C

Esto se debe a que para tener un paquete de ondas inicialmente muy estrecho se necesita sumar una cantidad de ondas individuales que tengan un amplio rango de distintas velocidades de fase (con distintos valores de k y ω) que hagan que, al pasar el tiempo, partes del paquete de onda se "muevan" a mayor velocidad que otras partes y de esta fama se ensanche el paquete.