

(1)

Obtener el Campo Eléctrico $\vec{E}$ a partir del potencial eléctrico V

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

$$\int_B^A dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

$$-\int_A^B dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

$$\int_A^B -dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (4)$$

$$\Rightarrow -dV = \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

Caso cartesiano $V = V(x, y, z)$

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) \quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \quad (6)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (7)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (8)$$

Si por ejemplo $V = V(x, y, z) = 4x^2 y^3 z^4$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -8xy^3z^4 ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -12x^2 y^2 z^4 ; E_z = -16x^2 y^3 z^3$$

Caso Simetría esférica o Simetría cilíndrica

(2)

$$V = V(r) \quad (1)$$

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

$$\vec{E} = E(r) \hat{r} \quad (3)$$

$$dV = -E dr \quad (4)$$

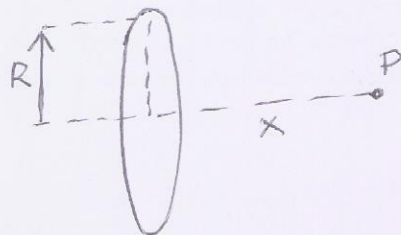
$$\Rightarrow E = - \frac{dV}{dr} \quad (5)$$

$$\vec{E} = - \frac{dV}{dr} \hat{r} \quad (6)$$

Ejemplo cartesiano

En un problema previo, determinamos que el potencial producido por un aro aislante de radio R que tiene una carga Q distribuida uniformemente (λ constante) en un punto P cualquiera localizado a una distancia x del centro del aro a lo largo de su eje de simetría es

$$V(x) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad (7)$$



De acuerdo a (8)

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = -kQ \frac{\partial}{\partial x} \left[(R^2 + x^2)^{-1/2} \right]$$

$$E_x = -KQ \left[\left(-\frac{1}{2}\right) (R^2 + x^2)^{-3/2} 2x \right] \quad (3)$$

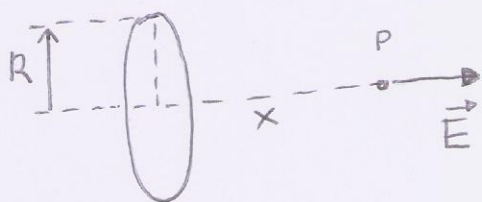
$$E_x = KQ \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (8)$$

Ademas, a lo largo del eje de simetría del aro, el potencial eléctrico no depende ni de y ni de z .

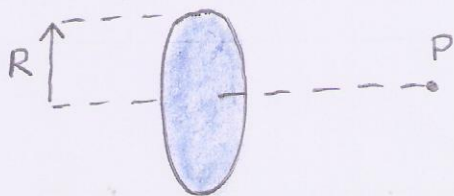
$$\Rightarrow E_y = -\frac{\partial V(x)}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$E_z = -\frac{\partial V(x)}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

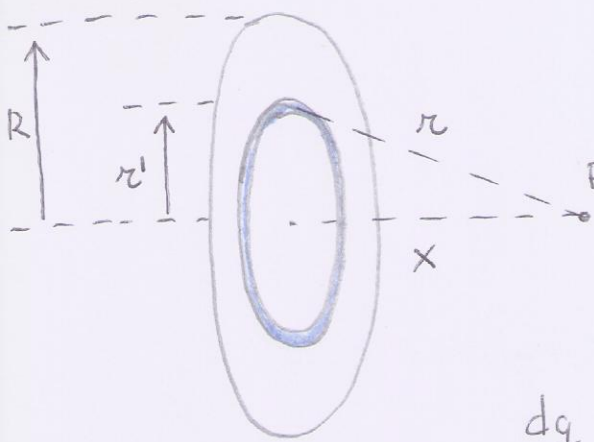
Por lo tanto, $\vec{E} = E_x \hat{i}$ (en el punto P) (11)



Para los estudiantes : Determinar el potencial eléctrico producido por un disco aislante de radio R que tiene una carga Q distribuida uniformemente (en su superficie) en un punto P cualquiera localizado a una distancia x del centro del disco a lo largo del eje de simetría del disco. Utilizar el potencial eléctrico obtenido para calcular el campo eléctrico en dicho punto.



(4)



✓ El disco cargado puede pensarse como un conjunto de aros con radios r' ($0 \leq r' \leq R$)

✓ La carga dq del aro azul genérico de radio r' es

$$dq = \sigma dA \quad (12)$$

✓ donde σ es la densidad superficial de carga que es constante porque la carga Q del disco está distribuida uniformemente $\Rightarrow \sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (13)$

✓ y el diferencial dA es el área infinitesimal del aro genérico azul dada por

$$dA = 2\pi r' dr' \quad (14)$$

✓ El potencial eléctrico producido en el punto P genérico por la carga dq del aro azul de radio r' es $K \frac{dq}{\sqrt{r'^2 + x^2}}$.

✓ El potencial total en P (debido a todos los aros que forman el disco) es:

$$\begin{aligned} V_P &= \int_0^R K \frac{dq}{r} = \int_0^R K \frac{dq}{\sqrt{r'^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma dA}{\sqrt{r'^2 + x^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + x^2}} \quad (15) \end{aligned}$$

5

Después de hacer la integral, se obtiene

$$V_p = V_p(x) = V(x) \quad (16)$$

y con este potencial se puede determinar el campo eléctrico

$$\vec{E} = E_x \hat{i} = - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \hat{i} \quad (\text{en un punto } P \text{ genérico}) \quad (17)$$