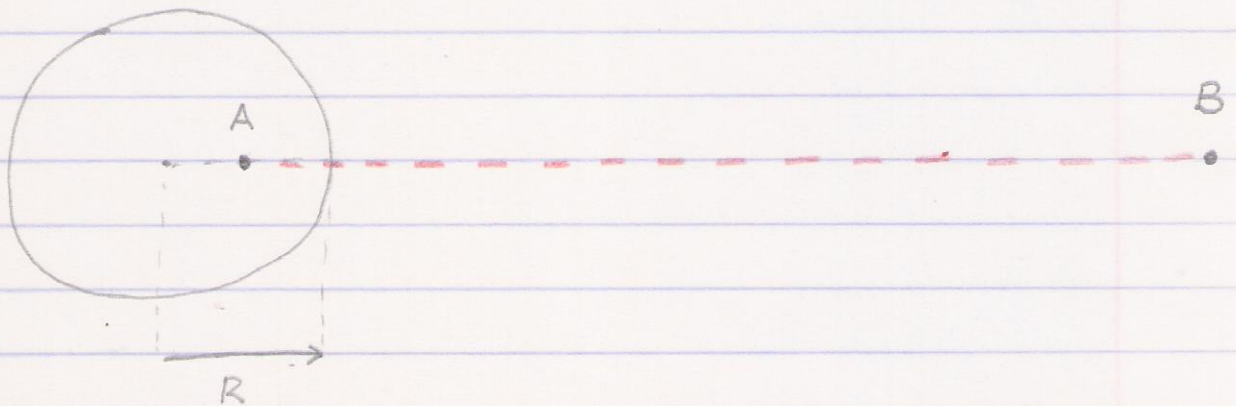


Se tiene un aislante esférico sólido de radio  $R$  que contiene una densidad volumétrica de carga  $\rho = Ar$ , donde  $A$  es una constante conocida y  $r$  es la distancia de cualquier punto del aislante a su centro. a) Determine la diferencia de potencial eléctrico entre un punto localizado en  $r = R/2$  y un punto que se encuentra a una distancia muy grande (infinito) del centro del aislante. b) Tomando como referencia en el infinito el potencial eléctrico igual a cero, calcule el potencial eléctrico en  $r = R/2$ .

a) En la figura se muestra el punto A localizado a una distancia  $r = R/2$  y el punto B en el infinito.



La diferencia de potencial eléctrico entre A y B viene dada por

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

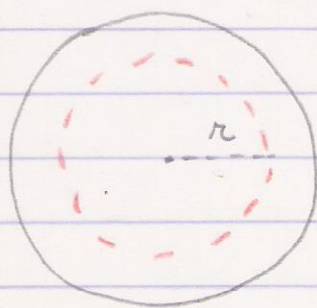
Para ir de A a B a través de la trayectoria punteada roja hay que pasar primero por la región del aislante comprendida entre  $r_A = R/2$  y  $r = R$  y luego atravesar la región externa que se extiende de  $r = R$  hasta  $r = r_B$ , donde  $r_B \rightarrow \infty$ .

La ecuación (1) puede escribirse como

$$V_A - V_B = \int_{r_A = R/2}^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^{r_B = \infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

donde  $\vec{E}_1$  es el campo eléctrico en el aislante y  $\vec{E}_2$  es el campo eléctrico fuera del aislante.

Cálculo de  $\vec{E}_1$



Usando ley de Gauss, tomando la superficie Gaussiana esférica roja de radio  $r$

$$\oint_{\text{SUP}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (3)$$

$$\Rightarrow E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (4) \quad \text{donde}$$

$Q_{\text{enc}}$  es la carga encerrada por la superficie Gaussiana, esto es

$$Q_{\text{enc}} = \int \rho \, dV, \quad (5)$$

donde  $dV = 4\pi r'^2 dr'$  es el diferencial de volumen apropiado para la simetría esférica y la integral se realiza en el volumen encerrado por la superficie Gaussiana roja.

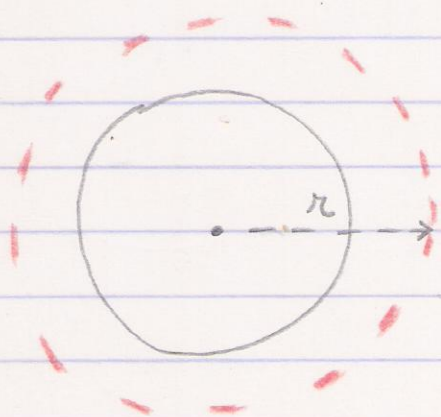
De esta forma, se tiene que

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^r A r' (4\pi r'^2) dr' = \pi A r^4 \quad (6)$$

$$\text{Con (4) y (6)} \Rightarrow E_1 = \frac{A}{4\epsilon_0} r^2 \quad (7)$$

$$\vec{E}_1 = E_1 \hat{r} \quad (8)$$

### Cálculo de $E_2$



Usando la ley de Gauss (Ecuación 3) para la superficie Gaussiana roja que se muestra, se obtiene

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (9)$$

En este caso  $Q_{enc}$  es toda la carga que hay en el aislante, esto es

$$Q_{enc} = \int_0^R \rho \, dVol = \pi A R^4 \quad (10)$$

Combinando (9) y (10)

$$E_2 \, 4\pi r^2 = \frac{\pi A R^4}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{A R^4}{4\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} \right) \quad (10)'$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \hat{r} \quad (11)$$

Teniendo  $\vec{E}_1 = \frac{A}{4\epsilon_0} r^2 \hat{r} \quad (12) \quad y$

$$\vec{E}_2 = \frac{A R^4}{4\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} \right) \hat{r} \quad (13)$$

podemos entonces calcular  $V_A - V_B$  usando la ecuación (2)

$$V_A - V_B = \int_{R/2}^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \quad (14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (12) y (13) en la (14):

$$V_A - V_B = \int_{R/2}^R \frac{A}{4\epsilon_0} r^2 \, dr + \int_R^\infty \frac{A R^4}{4\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad (15)$$

$$V_A - V_B = \frac{A}{4\epsilon_0} \int_{R/2}^R r^2 dr + \frac{AR^4}{4\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_A - V_B = \left( \frac{A}{4\epsilon_0} \right) \frac{r^3}{3} \Big|_{R/2}^R + \frac{AR^4}{4\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{\infty}$$

$$V_A - V_B = \frac{A}{12\epsilon_0} \left( R^3 - \left( \frac{R}{2} \right)^3 \right) + \frac{AR^4}{4\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} \right)$$

$$V_A - V_B = \left( \frac{7}{96} + \frac{1}{4} \right) \frac{AR^3}{\epsilon_0} = \frac{31}{96} \frac{AR^3}{\epsilon_0} \quad (16)$$

La ecuación (16) es la diferencia de potencial eléctrico entre el punto A que está a una distancia  $r = R/2$  del centro del aislante y el punto B que está en "el infinito".

b) Si se toma al potencial eléctrico en el infinito como cero ( $V_B = 0$ ), entonces de la ecuación (16) se tiene que el potencial en el punto A es

$$V_A = \frac{31}{96} \frac{AR^3}{\epsilon_0} \quad (17)$$

### Comentario adicional

Si se pidiera el potencial eléctrico en un punto en el interior del aislante localizado a una distancia  $r$  genérica del centro entonces

$$V_A - V_B \xrightarrow{0} = V_A = V(r) \quad (18)$$

y la ecuación (15) se tendría que escribir como

$$V_A - V_B = V(r) = \int_r^R \frac{A}{4\epsilon_0} r'^2 dr' + \int_R^\infty \frac{AR^4}{4\epsilon_0} \frac{dr'}{r'^2} \quad (19)$$

De esta forma

$$V(r) = \frac{A}{4\epsilon_0} \frac{r'^3}{3} \Big|_r^R + \frac{AR^4}{4\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r'} \right) \Big|_R^\infty$$

$$V(r) = \frac{A}{12\epsilon_0} (R^3 - r^3) + \frac{AR^3}{4\epsilon_0} = \frac{AR^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) - \frac{A}{12\epsilon_0} r^3$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{AR^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1+3}{12} \right) - \frac{A}{12\epsilon_0} r^3 = \frac{AR^3}{3\epsilon_0} - \frac{A}{12\epsilon_0} r^3$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{A}{3\epsilon_0} \left( R^3 - \frac{r^3}{4} \right) \quad (20)$$

Para comprobar la validez de la ecuación (20) podríamos evaluarla cuando  $r = R/2$  y el resultado es

$$\begin{aligned} V(r=R/2) &= \frac{A}{3\epsilon_0} \left( R^3 - \frac{(R/2)^3}{4} \right) \\ &= \frac{A}{3\epsilon_0} \left( R^3 - \frac{R^3}{32} \right) = \frac{A}{3\epsilon_0} \left( \frac{31}{32} \right) R^3 = \frac{31}{96} \frac{A R^3}{\epsilon_0} \quad (21) \end{aligned}$$

La ecuación (21) es igual a la (17). Queda comprobada la validez de la ecuación (20).