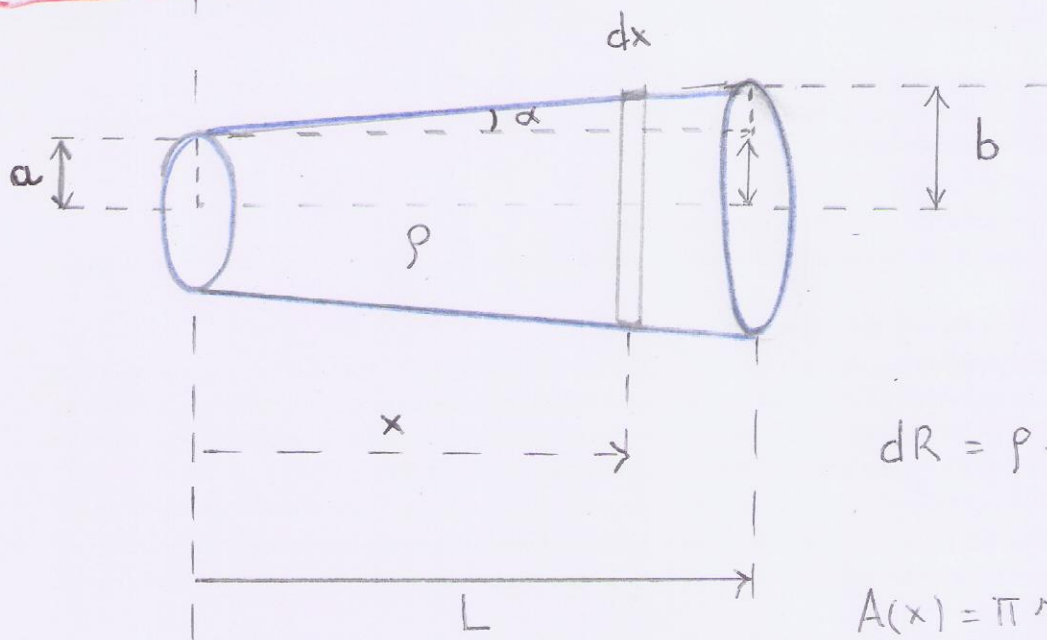


Cálculo de la resistencia R de un resistor de resistividad ρ .



$$R = \int dR \quad (1)$$

$$dR = \rho \frac{dx}{A(x)} \quad (2)$$

$$A(x) = \pi r^2 = \pi (a + x \tan \alpha)^2 \quad (3)$$

$$\tan \alpha = \frac{b-a}{L} \quad (4)$$

$$R = \int_0^L \rho \frac{dx}{\pi (a + x \tan \alpha)^2} = \frac{\rho}{\pi} \int_0^L \frac{dx}{(a + x \tan \alpha)^2} \quad (5)$$

$$\xi = a + x \tan \alpha \Rightarrow d\xi = \tan \alpha dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\tan \alpha} d\xi$$

$$\int \frac{dx}{(a + x \tan \alpha)^2} = \frac{1}{\tan \alpha} \int \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{\tan \alpha} \int \xi^{-2} d\xi = -\frac{1}{\tan \alpha} \xi^{-1} = -\frac{1}{\tan \alpha} \frac{1}{a + x \tan \alpha}$$

$$R = -\frac{\rho}{\pi} \frac{1}{\tan \alpha} \left(\frac{1}{a + x \tan \alpha} \right) \Big|_0^L = -\frac{\rho}{\pi \tan \alpha} \left[\frac{1}{a + L \tan \alpha} - \frac{1}{a} \right]$$

$$R = -\frac{\rho}{\pi \tan \alpha} \left[\frac{1}{a + (b-a)} - \frac{1}{a} \right] = -\frac{\rho}{\pi \tan \alpha} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right]$$

$$R = -\frac{\rho}{\pi \tan \alpha} \left[\frac{a-b}{ba} \right] = -\frac{\rho}{\pi \left(\frac{b-a}{L} \right)} \left[\frac{a-b}{ba} \right] = \frac{\rho L}{\pi ab} \quad (6)$$

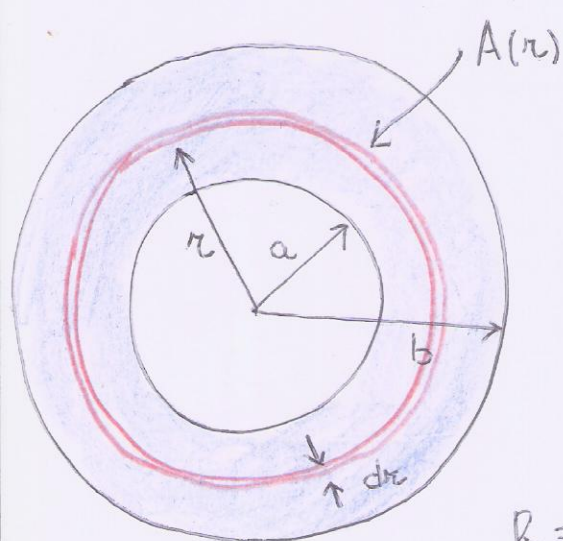
$$\text{Si } a=b \text{ (por ejemplo)} \Rightarrow R = \frac{\rho L}{\pi a^2} \quad (7)$$

Problema 25.60 (Sears - Zemansky, pag. 977, Vol. 2, Ed. II)

(A)

La región entre dos cascarones esféricos conductores concéntricos de radios a y b está llena de un material conductor con resistividad ρ .

a) Demuestre que la resistencia entre los cascarones está dada por $R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$



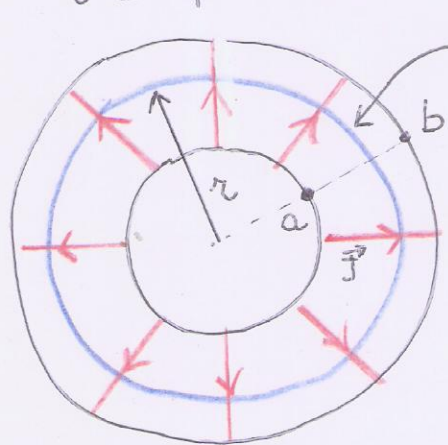
$$dR = \rho \frac{dr}{A(r)} \quad (1)$$

$$A(r) = 4\pi r^2 \quad (2)$$

$$R = \int_a^b dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \quad (3)$$

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (4)$$

b) Deduzca una expresión de la densidad de corriente en función del radio, en términos de la diferencia de potencial eléctrico entre los cascarones.



$$I = \int_{SUP} \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (5)$$

$\vec{J} \parallel d\vec{A}$ y $|\vec{J}| = \text{constante}$ en todos los puntos de SUP

$$\Rightarrow I = \int_{SUP} |\vec{J}| |d\vec{A}| \cos 0^\circ = |\vec{J}| \int_{SUP} |d\vec{A}| \quad (6)$$

$$\Rightarrow I = J A(r) \quad (7)$$

donde $A(r) = 4\pi r^2$ (8)

(B)

$$\Rightarrow I = J 4\pi r^2 \Rightarrow J = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (8)$$

Por otro lado, sabemos que $I = \frac{V_{ab}}{R}$ (9)

(8), (9) $\Rightarrow J = \frac{V_{ab}}{4\pi r^2 R}$ (10)

(4) y (10) $\Rightarrow J = \frac{V_{ab}}{4\pi r^2 \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{V_{ab} ab}{\rho(b-a)r^2}$

c) Demuestre que el resultado del inciso (a) se reduce a $R = \rho \frac{L}{A}$ cuando $L = b-a$ es pequeña.

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{b-a}{ab}\right) = \frac{\rho}{4\pi} \frac{L}{ab}$$

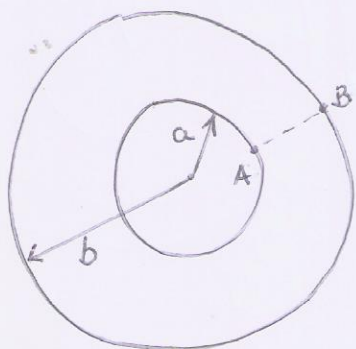
Cuando L es pequeña es porque $b \approx a$

$$\Rightarrow R \approx \frac{\rho L}{4\pi a^2} = \frac{\rho L}{A} \quad \checkmark$$

d) Encontrar R usando

$$R = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\int_{SUP} \vec{J} \cdot d\vec{A}} \quad (*)$$

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho} \quad (**)$$



Usando ley de Gauss se determine $\vec{E}$ en la región $a \leq r \leq b$. Luego se usan las ecuaciones (*) y (**) para determinar R .