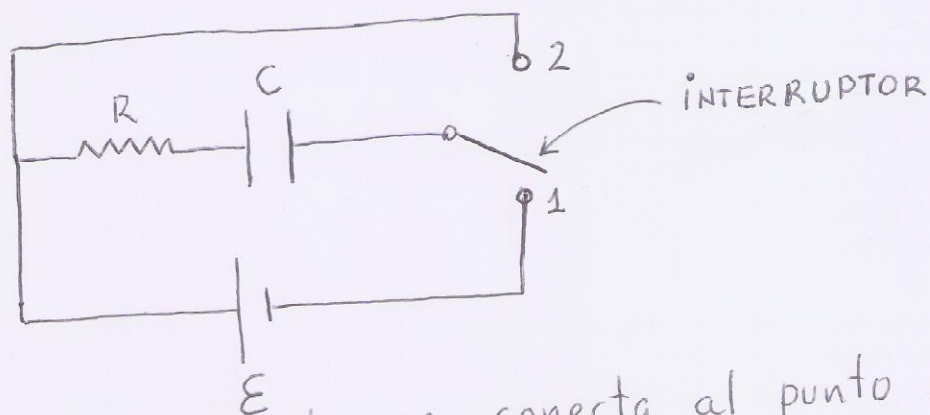


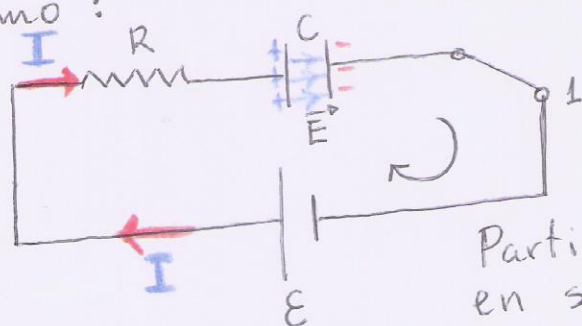
Circuito RC

Consideremos el siguiente circuito :

(1)



Si el interruptor se conecta al punto 1, el circuito queda como :



✓ El efecto de este circuito es cargar el condensador C con la batería ideal de f.e.m. $\mathcal{E}$.

Partiendo del punto 1 y moviéndose en sentido horario en el circuito,

aplicamos la Regla de Kirchhoff $\sum V = 0$, esto es

$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0 \quad (1).$$

Es importante mencionar que, en este proceso, la placa izquierda del condensador acumula carga eléctrica positiva y la placa derecha se carga negativamente. Esto implica que el campo eléctrico dentro del capacitor va dirigido hacia la derecha (como se muestra en la figura), indicando esto que la placa izquierda es la de mayor potencial eléctrico y de allí el signo menos del cambio del potencial $\left(-\frac{Q}{C}\right)$ que ocurre al movernos de la placa izquierda a la derecha.

Como $I = \frac{dQ}{dt}$ (2),

(2)

puesto que es por la corriente eléctrica I que se carga el condensador con carga $+Q$ en la placa izquierda y $-Q$ en la placa derecha, la ecuación (1) puede escribirse como

$$\mathcal{E} - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (3).$$

La ecuación (3) es una ecuación diferencial sencilla que puede resolverse por el método de separación de variables. Aquí las variables son Q y t . Esto quiere decir que estamos buscando una solución del tipo $Q = Q(t)$. Por lo tanto, el condensador no se carga instantáneamente sino que su carga va aumentando progresivamente a medida que transcurre el tiempo. Cambiemos a Q por Q' y a t por t' .

$$(3) \Rightarrow \mathcal{E} - \frac{Q'}{C} = R \frac{dQ'}{dt'} \Rightarrow \mathcal{E}C - Q' = RC \frac{dQ'}{dt'}$$

$$\Rightarrow Q' - \mathcal{E}C = -RC \frac{dQ'}{dt'} \Rightarrow -\frac{dt'}{RC} = \frac{dQ'}{Q' - \mathcal{E}C} \quad (4).$$

Si el condensador inicialmente no estaba cargado, se puede escribir que Q (cuando $t'=0$) es cero, es decir, $Q'(t'=0) = 0$. Integrando el lado izquierdo de la ecuación (4) (con respecto al tiempo) desde $t'=0$ hasta un tiempo genérico $t'=t$ y el lado derecho (con respecto a la carga) desde $Q'=0$ hasta una carga genérica $Q'=Q$, escribimos

$$\int_0^t \frac{dt'}{RC} = \int_0^Q \frac{dQ'}{Q' - EC} \quad (5)$$

El lado izquierdo de (5) da $\int_0^t \frac{dt'}{RC} = -\frac{t}{RC} \quad (6)$

Para el lado derecho, hacemos el cambio de variable

$$\xi = Q' - EC \quad (7) \Rightarrow d\xi = dQ' \quad (8)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dQ'}{Q' - EC} = \int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi = \ln(Q' - EC) \quad (9)$$

$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ'}{Q' - EC} = \ln(Q' - EC) \Big|_0^Q = \ln(Q - EC) - \ln(-EC)$$

$$= \ln\left(\frac{Q - EC}{-EC}\right) \quad (10)$$

$$(5), (6) \text{ y } (10) \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{Q - EC}{-EC}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-t/RC} = \frac{Q - EC}{-EC} \Rightarrow -EC e^{-t/RC} = Q - EC$$

$$\Rightarrow Q = EC - EC e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{Q = EC(1 - e^{-t/RC})} \quad (11)$$

El producto RC se denomina "constante de tiempo del circuito" y se simboliza por la letra griega τ .

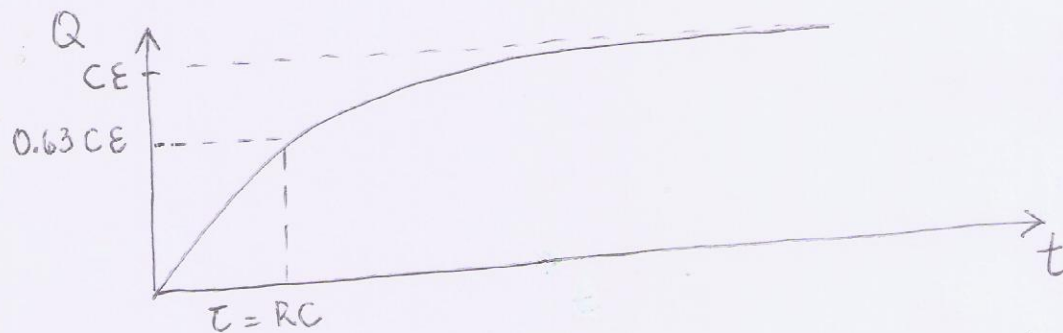
$$\tau = RC \quad (12)$$

Las unidades de RC son unidades de tiempo. Veamos:

$$[T] = [R][C] = \frac{[\cancel{V}][Q]}{[I][\cancel{V}]} = \frac{[Q]}{[I]} = [t] = 1s \quad \checkmark \quad (13)$$

✓ De la ecuación (ii) se comprueba que cuando $t=0 \Rightarrow Q(t=0) = \epsilon C (1 - e^0) = \epsilon C (1 - 1) = 0$, (14) como se escogió inicialmente. (4)

✓ Además, cuando $t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-t/RC} \rightarrow 0$
 (ii) $\Rightarrow Q(t=\infty) = \epsilon C (1 - 0) \Rightarrow Q(t=\infty) = \epsilon C$ (15).



✓ En un tiempo intermedio entre $t=0$ y $t=\infty$, por ejemplo cuando $t = \tau = RC$

(ii) $\Rightarrow Q(t=RC) = \epsilon C (1 - e^{-RC/RC}) = \epsilon C (1 - e^{-1}) = \epsilon C (1 - 0.37)$
 $\Rightarrow Q(t=RC) = 0.63 \epsilon C$ (16)

✓ De la figura y del cálculo realizado arriba vemos que la carga máxima o la carga final que puede acumular el condensador, si se deja cargar por un tiempo tan largo que puede considerarse infinito, es $Q_{\max} = C \epsilon$ (17)

✓ Vemos, comparando (16) y (17), que en un tiempo $t = \tau = RC$, el condensador acumula una carga que representa el 63% de la carga máxima posible ($Q_{\max} = C \epsilon$ y $Q(t=\tau) = 0.63 C \epsilon$).

(5)

Corriente eléctrica durante el proceso de carga del condensador

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(C\varepsilon (1 - e^{-t/RC}) \right) = C\varepsilon \left(\frac{1}{RC} \right) e^{-t/RC} \quad (18)$$

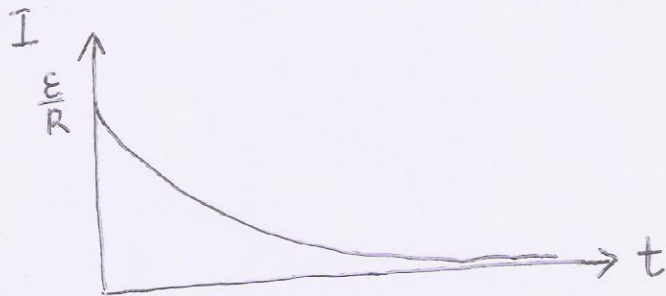
$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (19)$$

✓ Cuando el interruptor hace contacto con el punto 1, esto es, inicialmente, $t=0$, la ecuación (19) implica que en ese momento, la corriente eléctrica es

$$I(t=0) = \frac{\varepsilon}{R} e^0 \Rightarrow I(t=0) = \frac{\varepsilon}{R} \quad (20)$$

✓ Cuando ha pasado un tiempo tan largo que puede ser considerado infinito, la ec. (19) implica

$$I(t=\infty) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\infty} \Rightarrow I(t=\infty) = 0 \quad (21)$$



✓ Para un tiempo intermedio entre $t=0$ y $t=\infty$, por ejemplo para $t=\tau=RC$, la ecuación (19) nos dice que

$$I(t=\tau=RC) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-RC/RC} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-1} \Rightarrow I(t=\tau) = 0.37 \frac{\varepsilon}{R} \quad (22)$$

✓ Basados en los cálculos y gráfico de I vs t anteriores, se concluye que al comenzar el proceso de carga del condensador ($t=0$), la corriente eléctrica en el circuito es la máxima posible (Ver ecuación (20)) $\Rightarrow I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R}$ (23) y la corriente disminuye en el tiempo progresivamente en forma exponencial (Ver ecuación (19)) haciéndose un 63% más pequeña que la corriente máxima ($I_{\max}$) cuando ha transcurrido un tiempo $t = \tau = RC$ (Ver ec. (22)); $I(t=\tau) = 0.37 \frac{\mathcal{E}}{R} = 0.37 I_{\max}$.

✓ El gráfico de I vs t de la pag. ⑤ dice que en el proceso de carga del condensador, la corriente eléctrica inicial es la máxima posible ($I_{\max} = \mathcal{E}/R$) y que al pasar un tiempo suficientemente largo ($t \rightarrow \infty$), la corriente se reduce a cero ($I(t=\infty) = 0$).

✓ Por otro lado, el gráfico de Q vs t de la pag. ④ indica que al comienzo del proceso de carga del condensador, si el condensador estaba descargado, entonces $Q(t=0) = 0$ (Ver el gráfico) y que al pasar un tiempo suficientemente largo ($t \rightarrow \infty$), la carga en el condensador es la máxima posible, esto es, $Q_{\max} = C \mathcal{E}$.

Voltajes en R y en C durante el proceso de carga del condensador

(7)

En $t=0$ ✓ El condensador inicialmente se supone que no tiene carga $Q(t=0)=0 \Rightarrow V_C = \frac{Q(t=0)}{C} = 0$
 $\Rightarrow$ no hay voltaje o d.d.p.e entre las placas del condensador.

✓ La corriente eléctrica es la máxima posible $I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Esta corriente circula por el resistor. Por lo tanto, el voltaje en el resistor es $V_R = I(t=0)R = I_{\max}R = \mathcal{E}$.

El resultado anterior significa que, en $t=0$, la batería "está aplicada" solo sobre el resistor.

En $t=\infty$ ✓ El condensador se ha cargado totalmente ($Q_{\max} = C\mathcal{E}$) y la corriente eléctrica cesa ($I_{\text{final}} = 0$).

✓ Como no hay corriente circulando por el resistor (en $t=\infty$) entonces $V_R = I(t=\infty)R = 0$.

✓ Como la carga acumulada en el condensador (en $t=\infty$) es la máxima posible, entonces el voltaje en el capacitor es el máximo posible, esto es,

$$V(t=\infty) = V_{\max} = \frac{Q_{\max}}{C} = \frac{C\mathcal{E}}{C} = \mathcal{E}.$$

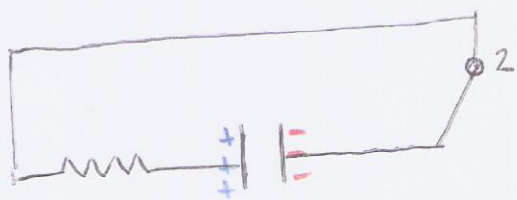
✓ En $t=\infty$, la batería "está aplicada" solamente al condensador.

Proceso de descarga del condensador

8

Supongamos ahora que una vez que se carga el condensador con la carga máxima posible $Q_{\max} = CE$, se desconecta el interruptor del punto 1 y se conecta al punto 2 de la figura que se muestra en la pag. ①.

El circuito ahora es :



La diferencia entre este circuito (circuito de descarga del condensador) y el circuito

de carga del condensador (Ver pag. ①) es que el nuevo circuito no tiene la batería. Matemáticamente implica que, para el caso de la descarga del condensador, la ecuación (1) tiene que ser modificada, considerando la ausencia de la batería en el proceso de descarga.

$$\Rightarrow \mathcal{E} = 0 \quad (23)$$

Sustituyendo (23) en (1) :

$$-IR - \frac{Q}{C} = 0 \quad (24)$$

$$\text{Como } I = \frac{dQ}{dt} \quad (25)$$

$$(24) \text{ y } (25) \Rightarrow -R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (26)$$

Por razones puramente matemáticas, reemplazamos Q por Q' y t por t' .

(9)

$$-R \frac{dQ'}{dt'} - \frac{Q'}{C} = 0 \quad (27)$$

$$\Rightarrow \frac{dQ'}{Q'} = -\frac{1}{RC} dt' \quad (28)$$

Si se escoge al tiempo inicial $t'=0$, como el tiempo en el que el interruptor se conecta al punto 2 (de la figura de la página ①) estando en ese preciso momento el condensador cargado con la carga máxima posible $Q_{\max} = C\varepsilon$, entonces, la integral en la variable Q' (lado izquierdo de la ec. (28)) se haría desde $Q'(t'=0) = Q_{\max} = C\varepsilon$ hasta una carga genérica Q en un tiempo cualquiera $t'=t$.

Esto es:

$$\int_{Q_{\max}=C\varepsilon}^Q \frac{dQ'}{Q'} = \int_{t'=0}^{t'=t} -\frac{1}{RC} dt' \quad (29)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right) = \ln\left(\frac{Q}{\varepsilon C}\right) = -\frac{1}{RC} t$$

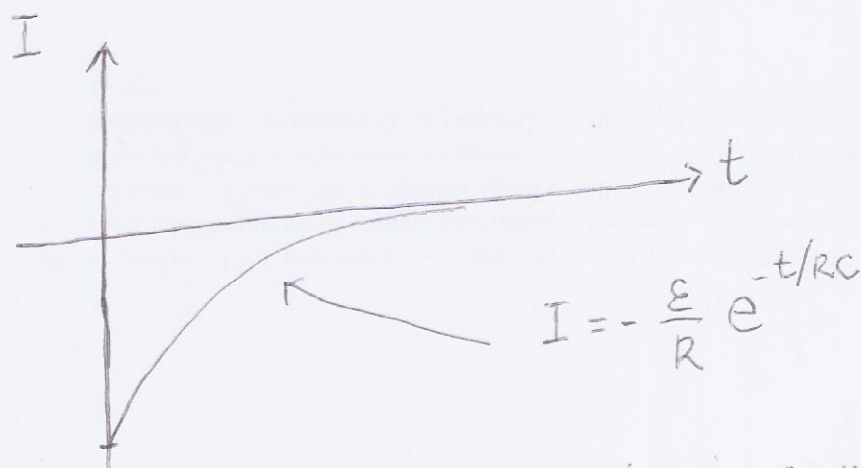
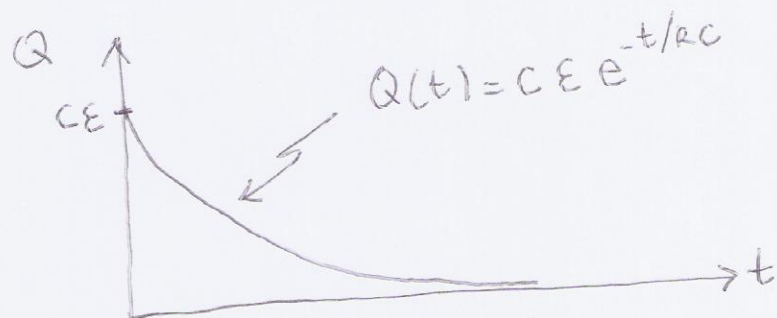
$$\frac{Q}{\varepsilon C} = e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{Q = \varepsilon C e^{-t/RC}} \quad (30)$$

La corriente eléctrica durante el proceso de descarga del condensador es $I = \frac{dQ}{dt} \quad (31)$

$$(30) \text{ y } (31) \Rightarrow I = \varepsilon C \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-t/RC}$$

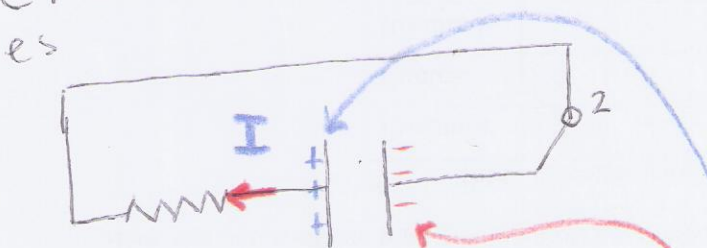
(10)

$$I = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (32)$$



¿Cuál es el significado del signo menos de la corriente eléctrica?

El circuito durante el proceso de descarga del condensador es



Hay que notar que durante el proceso de carga, la placa izquierda del condensador se

carga positivamente y la placa derecha se carga negativamente.

Por esta razón, la corriente en el proceso de descarga sale de la placa izquierda (cuando en el proceso de carga llegaba a la placa izquierda) y, además, circula por

el resista en sentido opuesto al que tuvo
durante el proceso de carga. (Comparar la
ultima figura de la página (10) con la
segunda figura de la página (1)).

(11)