

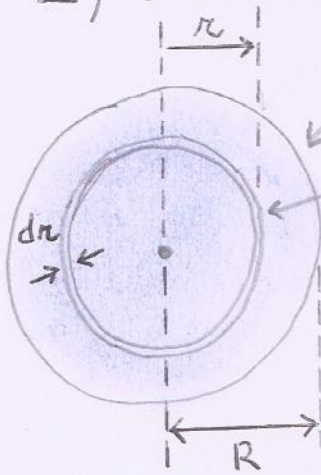
Problema (Simetría Esférica)

①

Se tiene un aislante esférico de radio R que contiene una carga eléctrica con densidad volumétrica $\rho = Ar$, donde A es una constante conocida y r es la distancia de cualquier punto del aislante a su centro geométrico. I) Determine el campo eléctrico en las regiones: a) $0 \leq r \leq R$ b) $r > R$

II) Hacer un gráfico de E vs. r

III) Determinar la carga eléctrica del aislante.



aislante esférico de radio R

cascarón esférico de radio r y grosor dr (infinitesimal)

✓ El volumen del aislante esférico es

$$Vol = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (1)$$

✓ El volumen del cascarón esférico infinitesimal

$$dVol = 4\pi r^2 dr \quad (2)$$

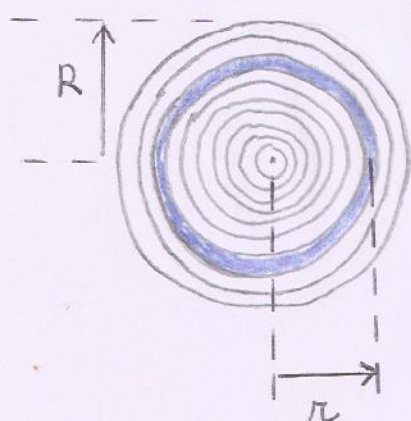
✓ A partir de (2) se puede encontrar (1) pues el aislante esférico puede ser pensado como un conjunto de cascarones esféricos infinitesimales con radios desde $r=0$ hasta $r=R$.



$$Vol = \int_0^R dVol = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^R r^2 dr$$

$$Vol = 4\pi \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \checkmark$$

Vamos primero a calcular la carga total del aislante esférico.



✓ En el cascarón esférico infinitesimal azul hay una carga dq

✓ La densidad de carga volumétrica en ese cascarón viene dada por

$$\rho(r) = \frac{dq}{dVol} \quad (3) \Rightarrow dq = \rho(r) dVol \quad (4)$$

$$(2) \text{ y } (4) \Rightarrow dq = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (5)$$

✓ La carga total del aislante esférico de radio R es igual a la suma de las cargas de todos los cascarones esféricos que forman el aislante

$$Q = \int_0^R dq = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = \int_0^R 4\pi r^2 A r dr = 4\pi A \int_0^R r^3 dr$$

$$Q = 4\pi A \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R \Rightarrow Q = \pi A R^4 \quad (6)$$

✓ Comentario adicional:

Si ρ fuese constante, entonces

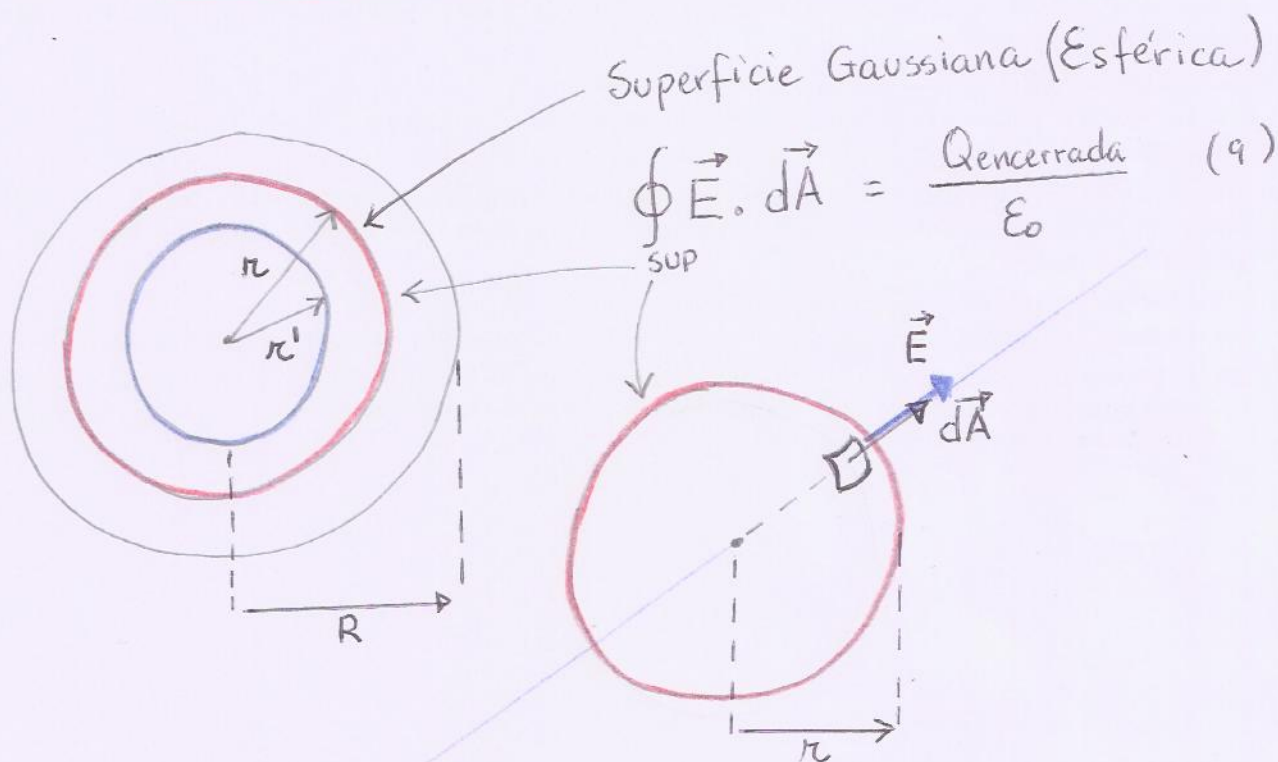
$$Q = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = \rho \int_0^R 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \rho Vol$$

$$Q = \rho Vol \quad (7)$$

$$\rho = \frac{Q}{Vol} = \frac{Q \text{ total}}{\text{volumen total}} \quad (\text{si } \rho = \text{constante}) \quad (8)$$

Campo Eléctrico en la región $0 \leq r \leq R$

(3)



✓ Ya que $\rho = \rho(r) \Rightarrow$ Simetría Esférica
 $\Rightarrow$ En todos los puntos de la superficie Gaussiana (superficie roja; sup) la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}$ es la misma.

✓ De acuerdo a la figura, $\vec{E} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos(0^\circ)$
 $\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ (10)

✓ (9) y (10) $\Rightarrow \oint_{SUP} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{SUP} E dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$ (11)

Ya que E es constante en la superficie Gaussiana SUP

$$\oint_{SUP} E dA = E \oint_{SUP} dA = E \times \text{Área de la SUP} = E \times 4\pi r^2$$
 (12)

$$(11) \text{ y } (12) \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (13)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (14)$$

¿ Q_{enc} ? Carga eléctrica encerrada por la superficie Gaussiana (roja) SUP.

Recordar que en general, la densidad volumétrica de carga es

$$\rho = \frac{dq}{dVol} \quad (15)$$

$$\Rightarrow dq = \rho dVol \Rightarrow Q_{enc} = \int_0^r dq = \int_0^r \rho dVol \quad (16)$$

Según la primera figura de la página 3 y de acuerdo a lo que vimos en la página (2), Ecuación (5), la carga del cascarón genérico (azul) de radio r' se escribe como

$$dq = 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (17)$$

$$\text{Como } \rho(r') = Ar' \quad (18),$$

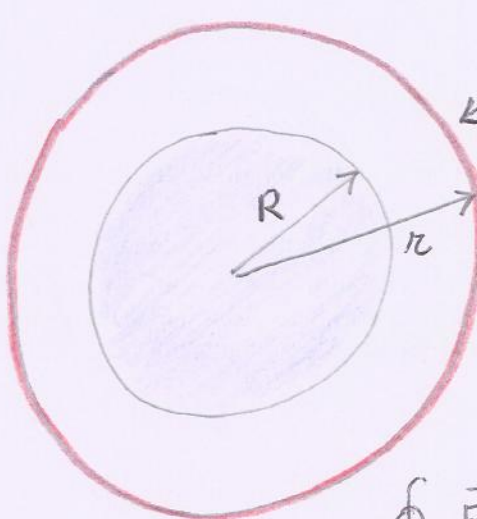
$$\text{entonces } dq = 4\pi r'^2 Ar' dr' \quad (19)$$

$$(16) \text{ y } (19) \Rightarrow Q_{enc} = \int_0^r 4\pi A r'^3 dr' = 4\pi A \int_0^r r'^3 dr'$$

$$\Rightarrow Q_{enc} = 4\pi A \frac{r'^4}{4} \Big|_0^r = \pi A r^4 \quad (20)$$

$$(14) \text{ y } (20) \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\pi A r^4}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{A}{4\epsilon_0} r^2 \quad 0 \leq r \leq R \quad (21)$$

Campo Eléctrico en la región $R \leq r < \infty$



The diagram shows a sphere of radius R with a shaded interior. A larger concentric sphere of radius r is drawn around it, representing a Gaussian surface. Arrows indicate the radii R and r from the center. The label "SUP GAUSSIANA" points to the outer sphere.

$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (22)$

Al igual que en la región $0 \leq r \leq R$

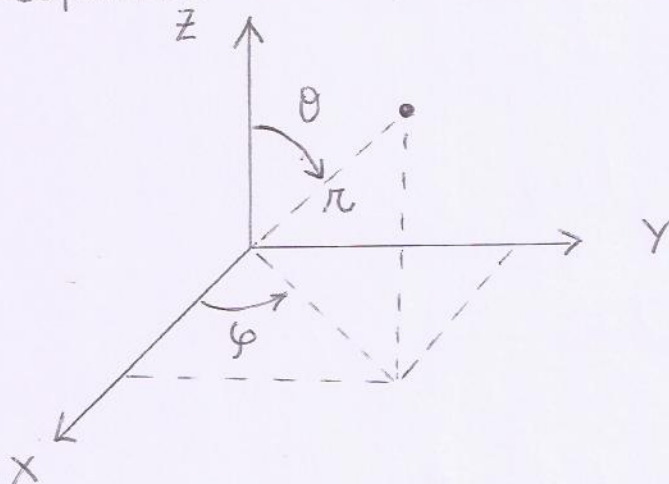
$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{\text{SUP}} E dA = E \oint_{\text{SUP}} dA = E 4\pi r^2 \quad (23)$

Comentario

✓ La ecuación (23) es siempre válida cuando hay simetría esférica, es decir,

$$\rho = \rho(r) \quad (24)$$

✓ Recordar que un punto del espacio en el sistema de coordenadas esféricas es especificado por (r, θ, φ)



✓ Cuando hay simetría esférica, la densidad de carga volumétrica no depende ni de θ ni de φ . Solamente depende de r ($\rho = \rho(r)$).

La carga encerrada por la superficie Gaussiana (6) de la figura de la página (5) es la que calculamos anteriormente y que se muestra en la ecuación (6).

$$Q_{\text{enc}} = \pi A R^4 \quad (24)$$

Usando (22), (23) y (24) :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\pi A R^4}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{A}{4\epsilon_0} \frac{R^4}{r^2} \quad r \leq R < \infty \quad (24)$$

