



- ✓ Se tiene un aislante esférico de radio b con un hueco esférico de radio a .
- ✓ El aislante esférico tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente en su volumen.
- ✓ Hay además una carga eléctrica puntual positiva q en el centro geométrico del sistema.

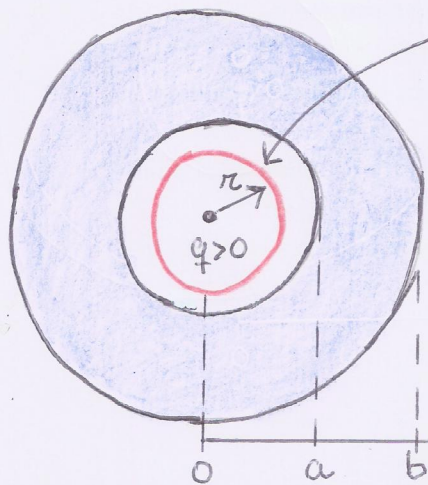
① Determinar el campo eléctrico en función de r y cantidades conocidas en las siguientes regiones:

- a) $0 \leq r \leq a$ (aire)
- b) $a \leq r \leq b$ (aislante)
- c) $b \leq r < \infty$ (aire)

② Hacer un gráfico de E vs. r

Determinación del campo eléctrico en la región $0 \leq r \leq a$ (aire)

(2)



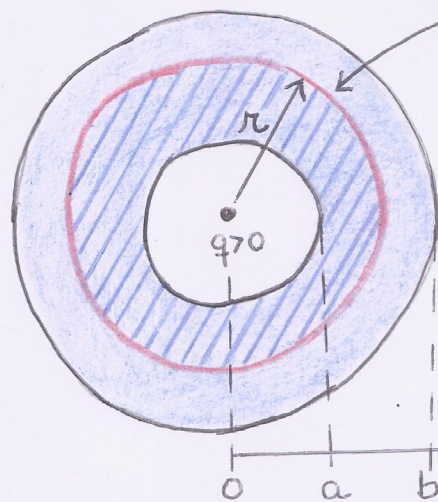
$$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (2)$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección radial. ($q > 0 \Rightarrow$ líneas de $\vec{E}$ "salen de la carga")

Determinación del campo eléctrico en la región $a \leq r \leq b$ (aislante)



SUP ✓ La superficie gaussiana de radio r genérico se dibuja entre $r=a$ y $r=b$.

✓ Se escribe la ley de Gauss para esta superficie, esto es:

$$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (3)$$

✓ Este es un problema que tiene

simetría esférica pues la carga eléctrica Q está distribuida uniformemente en el volumen del aislante entre $r=a$ y $r=b$.

✓ Hay que recordar que simetría esférica significa que la densidad de carga volumétrica $\rho = \frac{dq}{dVol}$ no depende ni de la coordenada θ ni de la coordenada ϕ .

✓ En este caso ρ ni siquiera depende de la coordenada r porque la carga está distribuida uniformemente en el volumen del aislante, lo cual quiere decir que ρ es constante. No depende ni de r , ni de θ , ni de φ que son las coordenadas esféricas. (3)

✓ Ya que la simetría del problema es esférica, el lado izquierdo de la ecuación (3) puede escribirse

$$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2 \quad (4)$$

✓ La carga encerrada por la superficie gaussiana SUP de radio r es

$Q_{\text{enc}} = q + Q_{\odot} \quad (5)$, donde $Q_{\odot}$ representa la carga eléctrica contenida entre $r=a$ y el radio r genérico de la superficie SUP (zona rayada)

✓ Para encontrar $Q_{\odot}$ hay que usar la ecuación

$$\rho = \frac{dq}{d\text{Vol}} \quad (5)'$$

$$\Rightarrow Q_{\odot} = \int_{r'=a}^{r'=r} \rho(r') d\text{Vol} \quad (6), \text{ donde para un problema}$$

de simetría esférica $d\text{Vol} = 4\pi r'^2 dr' \quad (7)$

(Ver documento Clase 4, 9 Octubre 2025, página (A))

✓ El texto del problema dice que hay una (4) carga Q distribuida uniformemente en el volumen del aislante. El volumen del aislante está comprendido entre $r=a$ y $r=b$.

✓ Usando de nuevo la definición $\rho = \frac{dq}{dVol}$

$$Q = \int_{r'=a}^{r'=b} \rho(r') dVol = \int_{r'=a}^{r'=b} \rho 4\pi r'^2 dr' \quad (8)$$

Como $\rho = \text{constante}$ $Q = \rho \int_{r'=a}^{r'=b} 4\pi r'^2 dr' = \rho \frac{4\pi}{3} r'^3 \Big|_a^b$

$$\Rightarrow Q = \rho \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3) \quad (9)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3)} \quad (10)$$

Conociendo la densidad volumétrica de carga ρ (ec. (10))

y usando (10) y (6) :

$$Q_{\odot} = \int_{r'=a}^{r'=r} \rho dVol = \rho \int_{r'=a}^{r'=r} 4\pi r'^2 dr' = \rho \frac{4\pi}{3} r'^3 \Big|_a^r$$

$$Q_{\odot} = \rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - a^3) \quad (11)$$

Usando (5), (10) y (11)

$$Q_{\text{enc}} = q + Q_{\odot} = q + \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3)} \frac{4\pi}{3} (r^3 - a^3)$$

$$\Rightarrow Q_{\text{enc}} = q + Q \left(\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \right) \quad (12)$$

(5)

Sustituyendo las ecuaciones (12) y (4)

en la ecuación (3):

$$E 4\pi r^2 = \frac{q + Q \left(\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \right)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + Q \left(\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \right)}{r^2} \quad (13)$$

✓ De la ecuación (13) se observa que ya que $q > 0$, si $Q > 0$ entonces $E > 0$ para cualquier valor de r entre $r=a$ y $r=b$.

✓ Si $Q < 0$, E sería cero cuando el numerador de la ecuación (13) fuese cero, esto es,

$$q + Q \left(\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \right) = 0 \Rightarrow (b^3 - a^3)q + Q(r^3 - a^3) = 0$$

$$\text{De esta fama} \quad Q(r^3 - a^3) = -q(b^3 - a^3)$$

$$\Rightarrow r^3 - a^3 = -\frac{q}{Q}(b^3 - a^3) \Rightarrow r^3 = a^3 - \frac{q}{Q}(b^3 - a^3)$$

$$\Rightarrow r = \left(a^3 - \frac{q}{Q}(b^3 - a^3) \right)^{1/3} \quad (14) \quad ; \quad q > 0 \quad \text{y} \quad Q < 0$$

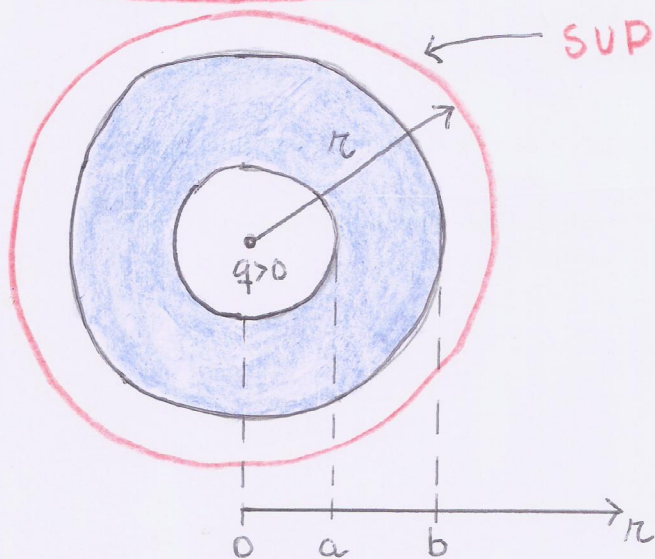
La ecuación (14) representa el valor de r al que $E=0$.

✓ El vector campo eléctrico en la región $a \leq r \leq b$ en general está dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + Q \left(\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \right)}{r^2} \hat{r} \quad (15)$$

(6)

Determinación del Campo Eléctrico en la región
 $b \leq r < \infty$ (aire)



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (16)$$

$$Q_{enc} = q + Q \quad (17)$$

✓ Recordar que en el aislante (zona azul) hay una carga Q .

(16) y (17) $\Rightarrow$

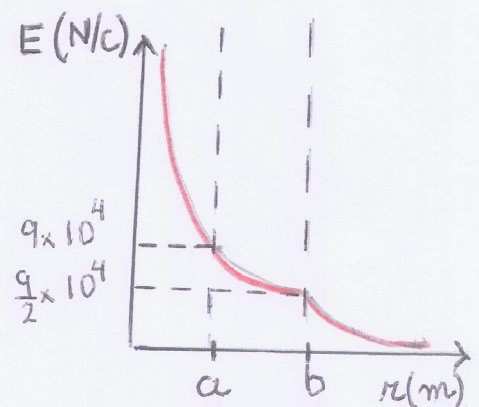
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{r^2} \quad (18)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{r^2} \hat{r} \quad (19)$$

Gráfico

Usando los valores $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$, $q = Q = 1 \times 10^{-9} C$,
 $a = 1cm = 1 \times 10^{-2} m$, $b = 2cm = 2 \times 10^{-2} m$

$$\Rightarrow E = \begin{cases} \frac{q}{r^2} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{q}{r^2} \left(1 + \frac{r^3 - 10^{-6}}{7 \times 10^{-6}} \right) & a \leq r \leq b \\ \frac{18}{r^2} & b \leq r < \infty \end{cases}$$



$$a = 1 \times 10^{-2} m$$

$$b = 2 \times 10^{-2} m$$