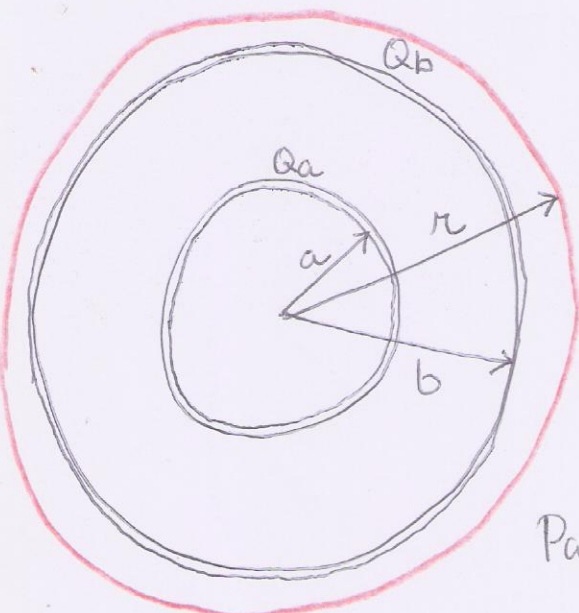


Se tiene un cascarón esférico^{conductor} de radio a con carga Q_a y otro cascarón esférico conductor de radio b ($b > a$), concéntrico con el primero, y con carga Q_b . Encuentre el potencial eléctrico $V = V(r)$, donde r es la distancia de cualquier punto del espacio al centro geométrico del sistema. ①

Región $b \leq r < \infty$



Ley de Gauss:

$$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_a + Q_b}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a + Q_b}{r^2} \quad (2)$$

Para obtener $V_A - V_B$ se escoge a

un punto A genérico localizado a $r_A = r$ y el punto B se selecciona como la referencia, esto es;

$$r_B = \infty, \quad V_B = V(r_B) = V(\infty) = 0.$$

Se aplica la fórmula

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

Como $V_A = V(r_A) = V(r)$ y $V_B = 0$ en $r_B = \infty$

$$(3) \Rightarrow V(r) - 0 = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a + Q_b}{r'^2} dr' = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r'} \right) \Big|_r^{\infty}$$

$$V(r) = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4)$$

(2)

Región $a \leq r \leq b$

Ley de Gauss;

$$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_a}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (6)$$

Para obtener $V(r)$ se escogen dos puntos A y B; el punto A es genérico y está a una distancia $r_A = r$ con un potencial igual a $V_A = V(r_A) = V(r)$.

El punto B es la referencia en esta región ($a \leq r \leq b$) que se escoge, en este caso, como el punto más alejado del centro geométrico, esto es $r_b = b$. El potencial eléctrico en este punto, esto es, $V_B = V(r_B) = V(b)$ se determina evaluando la expresión (4) en $r = b$.

$$\Rightarrow V_B = V(b) = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right) \quad (7)$$

Ahora aplicamos la fórmula $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (8)$

Ya que $V_A = V(r_A) = V(r)$ y $V_B = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right) \quad (9)$

$$(8) \Rightarrow V_A - V_B = V(r) - \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right) = \int_r^b \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' \quad (10)$$

$$(10) \Rightarrow V(r) = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right) + \int_r^b \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr'}{r'^2} \quad (11)$$

$$V(r) = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right) + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r'} \right) \Big|_r^b$$

$$V(r) = \frac{Q_a + Q_b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} \right) - \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} + \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_b}{b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{r} \quad (12)$$

Región $0 \leq r \leq a$

- ✓ $\vec{E} = 0$ porque esta región es una cavidad en un conductor (en realidad, esta región está dentro de dos conductores, dos cascarones esféricos)
- ✓ Al igual que para las dos regiones anteriores, se escogen dos puntos A y B. El punto A es el genérico ($r_A = r$; $V_A = V(r_A) = V(r)$). El punto B es la referencia que es el punto más alejado (en esta región) del centro geométrico del sistema ($r_B = a$; $V_B = V(r_B) = V(a)$).
- ✓ El potencial eléctrico en el punto $r_B = a$ se calcula evaluando la expresión (12) en $r = a$.

$$\Rightarrow V(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_b}{b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{a} \quad (13)$$

(4)

Entonces en la región $0 \leq r \leq a$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (14)$$

$$\Rightarrow V_A = V_B \quad (15)$$

Como $V_A = V(r_A) = V(r)$ y $V_B = V(r_B) = V(a) \quad (15)'$

con $V(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_b}{b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{a} \quad (16)$

$(15), (15)' \text{ y } (16) \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_b}{b} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{a} \quad (17)$

Hay que resaltar que $V(r) = \text{constante}$ en esta región porque $\vec{E} = 0$.