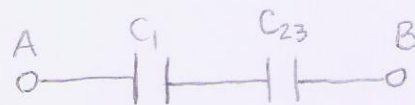
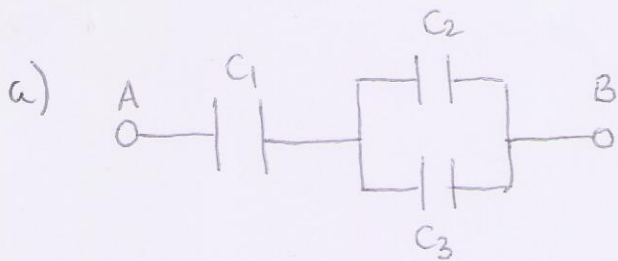
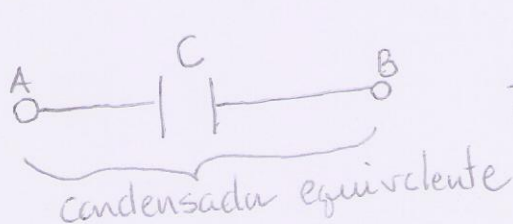


(A)



$$C_{23} = C_2 + C_3 = 5 \mu F \quad (1)$$



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} \Rightarrow C = \frac{5}{6} \mu F \quad (2)$$

$$V_{AB} = 150 \text{ V} \quad (3) \quad Q = C V_{AB} = \left(\frac{5}{6} \mu F\right)(150 \text{ V}) = \frac{750}{6} = 125 \mu C \quad (4)$$

↑ carga del condensador equivalente

C_1 y C_{23} están en serie $\Rightarrow$ Sus cargas son iguales e iguales a las de C

$$\Rightarrow Q_1 = Q_{23} = Q = 125 \mu C \quad (5)$$

C_2 y C_3 están en paralelo $\Rightarrow$ La suma de sus cargas es igual a la carga del condensador equivalente C_{23} .

$$\Rightarrow Q_2 + Q_3 = Q_{23} \quad (6)$$

y el voltaje de C_2 y el de C_3 son iguales y además iguales al del condensador equivalente C_{23}

$$\Rightarrow V_2 = V_3 = V_{23} \quad (7)$$

Pero se cumple para el condensador equivalente

que

$$C_{23} = \frac{Q_{23}}{V_{23}} \Rightarrow V_{23} = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \Rightarrow V_{23} = \frac{125 \mu C}{5 \mu C} \Rightarrow$$

$$V_{23} = 25 \text{ V} \quad (8)$$

$$(7) \text{ y } (8) \Rightarrow V_2 = V_3 = 25 \text{ V} \quad (9)$$

(B)

Para C_2 y C_3 se cumple:

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow Q_2 = C_2 V_2 = (2 \mu\text{F})(25 \text{ V}) = 50 \mu\text{C} \quad (10)$$

$$C_3 = \frac{Q_3}{V_3} \Rightarrow Q_3 = C_3 V_3 = (3 \mu\text{F})(25 \text{ V}) = 75 \mu\text{C} \quad (11)$$

Hay que notar que $Q_2 + Q_3 = 125 \mu\text{C}$ que coincide con (5).

A partir de (5), (10) y (11):

$$Q_1 = 125 \mu\text{C}, \quad Q_2 = 50 \mu\text{C} \quad \text{y} \quad Q_3 = 75 \mu\text{C} \quad (12)$$

Para determinar la energía acumulada en el sistema de condensadores, se puede encontrar la energía acumulada en el condensador equivalente C , esto es:

$$U = \frac{1}{2} Q V_{AB} \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} C V_{AB}^2 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (13)$$

$$(3), (4) \text{ y } (13) \Rightarrow U = \frac{1}{2} Q V_{AB} = \frac{1}{2} (125 \mu\text{C})(150 \text{ V}) = 9375 \mu\text{J} \quad (14)$$

$$= 9375 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$= 0.009375 \text{ J}$$

También se puede sumar las energías acumuladas en todos los condensadores, es decir

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 + \frac{1}{2} C_3 V_3^2 \quad (15)$$

Nota: se puede usar cualquier expresión de (13)

(C)

De (15), tenemos todas las cantidades necesarias para calcular U a excepción de V_1 . Para calcular V_1 :

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ecuación} \\ (5)}}{=} \frac{125 \mu\text{C}}{1 \mu\text{F}} = 125 \text{ V} \quad (16)$$

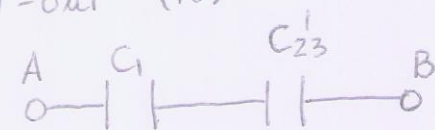
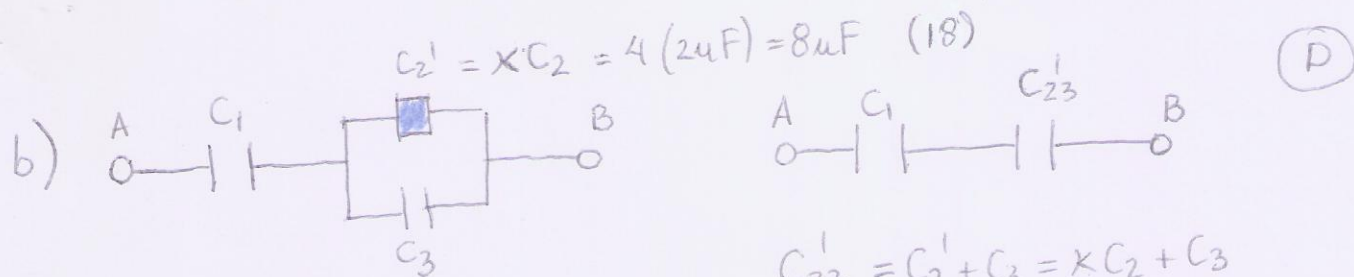
Entonces usando, los valores conocidos de $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$ y $C_3 = 3 \mu\text{F}$, y los resultados mostrados en (9) ($V_2 = V_3 = 25 \text{ V}$) y (15) ($V_1 = 125 \text{ V}$), podemos determinar el valor de U a partir de (1):

$$U = \frac{1}{2}(1 \mu\text{F})(125 \text{ V})^2 + \frac{1}{2}(2 \mu\text{F})(25 \text{ V})^2 + \frac{1}{2}(3 \mu\text{F})(25 \text{ V})^2$$

$$U = (7.812,5 + 625,0 + 937,5) \mu\text{J}$$

$$U = 9375 \mu \quad (17)$$

Este resultado coincide con el que se muestra en (14) como se esperaba.

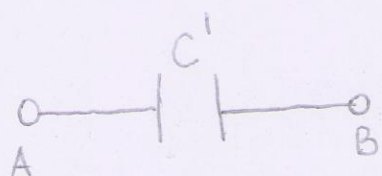


$$C_{23}' = C_2' + C_3 = K C_2 + C_3$$

$$C_{23}' = 4 \times 2\mu F + 3\mu F = 8\mu F + 3\mu F$$

$$C_{23}' = 11\mu F \quad (19)$$

El condensador equivalente es



$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}'} \Rightarrow C' = \frac{C_1 C_{23}'}{C_1 + C_{23}'} = \frac{11}{12}\mu F \quad (20)$$

✓ C_1 y C_{23}' están en serie $\Rightarrow Q_1 = Q_{23}'$ (21)

✓ Al introducir el dieléctrico en el capacitor 2 se redistribuye la carga que hay en el capacitor 2 y en el capacitor 3 cumpliéndose que la carga total acumulada por estos dos capacitores $Q_2 + Q_3$ permanece constante, es decir:

$$Q_2 + Q_3 = Q_2' + Q_3' \quad (22)$$

ó $Q_{23} = Q_{23}'$ (23)

✓ En este proceso, la carga del condensador C_1 no cambia, por lo tanto el voltaje de este condensador sigue siendo igual al voltaje que tenía antes de haberse introducido el dieléctrico en el condensador C_2 . $\Rightarrow V_1' = V_1 = 125V$ (24)
(ver ecuación (16))

(E)

Como la carga del condensador 1 no cambia

$$Q_1' = Q_1 = 125 \mu\text{C} \quad (25)$$

$$(21) \text{ y } (25) \Rightarrow Q_{23}' = 125 \mu\text{C} \quad (26)$$

$$\text{y como } C_{23}' = \frac{Q_{23}'}{V_{23}'} \Rightarrow V_{23}' = \frac{Q_{23}'}{C_{23}'} \quad (27)$$

$$(19), (26) \text{ y } (27) \Rightarrow V_{23}' = \frac{125 \mu\text{C}}{11 \mu\text{F}} \Rightarrow V_{23}' = 11.36 \text{ V} \quad (28)$$

Como los condensadores 2 y 3 están en paralelo

$$V_2' = V_3' = V_{23}' = 11.36 \text{ V} \quad (29)$$

$$\text{Como } C_2' = \frac{Q_2'}{V_2'} \Rightarrow Q_2' = C_2' V_2' \quad (30)$$

$$(18), (29) \text{ y } (30) \Rightarrow Q_2' = (8 \mu\text{F})(11.36 \text{ V})$$

$$Q_2' = 90.90 \mu\text{C} \quad (31)$$

$$\text{Además, } C_3' = \frac{Q_3'}{V_3'} \Rightarrow Q_3' = C_3' V_3' \quad (32)$$

$$\text{Como } C_3' = C_3 = 3 \mu\text{F} \quad (33) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_3' = (3 \mu\text{F})(11.36 \text{ V}) = 34.08 \mu\text{C} \\ (34) \end{array} \right.$$

$$\text{y } V_3' = 11.36 \text{ V}$$

$$(31) \text{ y } (34) \Rightarrow Q_2' + Q_3' = (90.90 + 34.08) \mu\text{C} = 124.98 \mu\text{C} \approx 125 \mu\text{C} \quad (35)$$

lo que es consistente con (22) porque $Q_2 + Q_3 = 125 \mu\text{C}$.

$$\text{Hasta ahora se tiene } Q_1' = 125 \mu\text{C}, Q_2' = 90.90 \mu\text{C}, Q_3' = 34.08 \mu\text{C} \quad (36)$$

(F)

Para calcular la energía almacenada en el sistema de condensadores C_1 , C_2' y C_3 podemos, al igual que se hizo en el inciso a), calcular la energía almacenada en el condensador equivalente, es decir

$$U = \frac{1}{2} C' V_{AB}'^2 \quad (37)$$

$$\text{donde } C' = \frac{11}{12} \mu F \quad (38)$$

$$\text{Y } V_{AB}' = V_1' + V_{23}' \quad (39)$$

$$(24) \Rightarrow V_1' = 125 \text{ V} \quad (40)$$

$$(28) \Rightarrow V_{23}' = 11.36 \text{ V} \quad (41)$$

$$(39), (40), (41) \Rightarrow V_{AB}' = (125 + 11.36) \text{ V} \Rightarrow V_{AB}' = 136.36 \text{ V} \quad (42)$$

$$\Rightarrow U' = \frac{1}{2} C' V_{AB}'^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12} \mu F \right) (136.36 \text{ V})^2 \Rightarrow U' = 8522.27 \mu J \quad (43)$$

Al igual que se hizo en el inciso a), podemos calcular U también con

$$U' = U_1' + U_2' + U_3' = \frac{1}{2} Q_1' V_1' + \frac{1}{2} Q_2' V_2' + \frac{1}{2} Q_3' V_3' \quad (44)$$

$$(40) \text{ y } (41) \Rightarrow V_1' = 125 \text{ V}; V_2' = V_3' = 11.36 \text{ V} \quad (45)$$

$$(36) \Rightarrow Q_1' = 125 \mu C, Q_2' = 90.90 \mu C, Q_3' = 34.08 \mu C \quad (46)$$

Como se dijo anteriormente, ni el voltaje ni la carga del condensador 1 cambió al introducir el

dieléctrico en el condensador 2. Esto implica que $Q_1' = Q_1$, $V_1' = V_1$ y por lo tanto $U_1' = U_1 = 7812,5 \mu J$ (47)
(ver ecuación (17)).

(G)

Por otro lado, el efecto de introducir el dieléctrico en el condensador 2 es cambiar la carga del condensador 2 de $Q_2 = 50 \mu C$ a $Q_2' = 90.90 \mu C$ y la carga del condensador 3 de $Q_3 = 75 \mu C$ a $Q_3' = 34.08 \mu C$.

Como el condensador 2 y el 3 están configurados en paralelo $\Rightarrow$ tienen la misma diferencia de potencial eléctrico (el mismo voltaje)

$$\Rightarrow V_2' = V_3' = 11.36 V.$$

Recordando la ecuación (44), la energía acumulada en el condensador 2 es

$$U_2' = \frac{1}{2} Q_2' V_2' = \frac{1}{2} (90.90 \mu C) (11.36 V) \Rightarrow U_2' = 516.312 \mu J \quad (48)$$

y la acumulada en el condensador 3 es

$$U_3' = \frac{1}{2} Q_3' V_3' = \frac{1}{2} (34.08 \mu C) (11.36 V) \Rightarrow U_3' = 193.57 \mu J \quad (49)$$

Usando (47), (48) y (49)

$$U' = U_1' + U_2' + U_3' = (7812,5 + 516.312 + 193.57) \mu J$$

$$\Rightarrow U' = 8522.38 \quad (50)$$

El resultado que muestra (50) es consistente (prácticamente igual) al que muestra (43), cosa que esperábamos.

Además, vemos que

$$U' < U \quad (51)$$

$$\begin{aligned} U' &= 8522.27 \mu\text{J} \\ U &= 9375 \mu\text{J} \end{aligned}$$

$$U_2' < U_2 \quad (52)$$

$$U_3' < U_3 \quad (53)$$

$$U_1' = U_1 \quad (54)$$

✓ A pesar de que el condensador 2 aumentó su carga, el voltaje de este condensador disminuyó de $V_2 = 25 \text{ V}$ a $V_2' = 11.36 \text{ V}$. El efecto combinado de disminución de voltaje y aumento de carga causó una disminución de la energía almacenada en el condensador 2 de $U_2 = 625 \mu\text{J}$ a $U_2' = 516.312 \mu\text{J}$. $(\Delta U_2 = U_2' - U_2 = -108.688 \mu\text{J})$ (55)
 (de $Q_2 = 50 \mu\text{C}$ a $Q_2' = 90.90 \mu\text{C}$)
 ↑ disminución de energía en el condensador 2

✓ La disminución en la energía acumulada por el condensador 3 es mayor que la disminución en la energía acumulada en el condensador 2.

$$U_3 = 937.5 \mu\text{J} ; U_3' = 193.57 \mu\text{J} \Rightarrow \Delta U_3 = U_3' - U_3$$

$$\Delta U_3 = -743.93 \mu\text{J} \quad (56)$$

↑ disminución de energía en el condensador 3

Trabajo del campo eléctrico es

(I)

$$W = -\Delta U \quad (57) \Rightarrow W = -(U' - U) = U - U' > 0 \quad (58)$$

El campo eléctrico que existe entre las placas del condensador 2 realiza un trabajo positivo sobre el trozo de dieléctrico (ver Ejemplos 24.11 y 24.10 (págs. 927 y 926, Sears-Zemansky, Vol. 2, Ed. II)) y por lo tanto el condensador "pierde" energía.

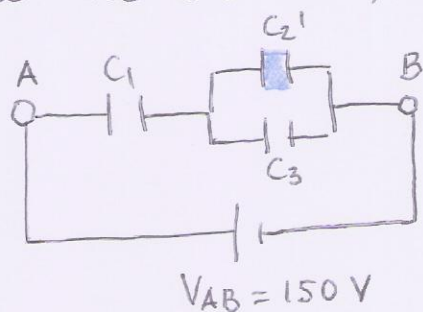
Por otro lado, al introducir el dieléctrico en el condensador 2, hay un flujo de carga del condensador 3 al condensador 2. Se pierde energía en los conductores que se calientan debido a su resistencia (ver Ej. 24.7, pag. 920, Sears-Zemansky)

$$W_{\text{ext}} = -W \quad (59)$$

$$W_{\text{ext}} < 0 \quad (60)$$

El trabajo externo es en parte realizado por el "agente externo" que introdujo el dieléctrico entre las placas del condensador 2 y se debe también a la resistencia de los conductores (que produce calor) cuando por ellos circula o fluye carga del condensador 3 al condensador 2.

c) Al conectar el nuevo sistema de condensadores a la batería, esto es (J)



$$C_1 = 1 \mu F; C_2' = 8 \mu F; C_3 = 3 \mu F \quad (61)$$

la nueva energía acumulada en el sistema es

$$U'' = \frac{1}{2} C' V_{AB}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12} \mu F \right) (150 V)^2 = 10.312,5 \mu J \quad (63)$$

✓ Al conectar la batería entonces aumenta la energía acumulada en el sistema de condensadores de $U' = 8522.27 \mu J$ a $U'' = 10.312,5 \mu J$.

✓ Esto representa un aumento

$$U'' - U' = 1790.23 \mu J \quad (64)$$

✓ Por otro lado, al conectar la batería, fluye carga de la batería al sistema de condensadores $\{C_1, C_2', C_3\} = \{C'\}_{\text{equivalente}} \quad C' = \frac{11}{12} \mu F$

Dicha carga es

$$Q_{\text{bat}} = Q_{\{C'\}}^{\text{final}} - Q_{\{C'\}}^{\text{inicial}} \quad (65)$$

(K)

donde $Q_{\{C'\}}^{\text{inicial}}$ es la carga del condensador equivalente $\{C'\}$ antes de reconectar la batería, esto es

$$Q_{\{C'\}}^{\text{inicial}} = 125 \mu\text{C} \quad (66)$$

y $Q_{\{C'\}}^{\text{final}}$ es la carga del condensador equivalente $\{C'\}$ después de reconectar la batería que es

$$Q_{\{C'\}}^{\text{final}} = C' V_{AB} = \left(\frac{11}{12} \mu\text{F}\right)(150\text{V}) = 137.5 \mu\text{C} \quad (67)$$

De esta forma la carga que "sale" de la batería hacia el sistema de condensadores $\{C'\} = \{C_1, C_2, C_3\}$ es

$$Q_{\text{bat}} = 137.5 \mu\text{C} - 125 \mu\text{C} = 12.5 \mu\text{C} \quad (68)$$

Esta carga pasó a través de los bornes de la batería. La batería realizó un trabajo sobre esta carga en contra del campo eléctrico que existe dentro de la batería (Esto será explicado en el Cap. 25, Sears-Zemansky, Vol. 2, Ed. II).

Como entre los terminales (bornes) de la batería hay una d.d.p.e $V_A - V_B > 0$, entonces el trabajo realizado por la batería es

$$W_{\text{bat}} = Q (V_A - V_B) = 12.5 \mu\text{C} \times 150\text{V} = 1875 \mu\text{J} \quad (69)$$

Comparando el resultado mostrado en (64) con el contenido en (69) se concluye que parte

del trabajo realizado por la batería se "pierde" en calentamiento de los conductores a través de los que fluye la carga de la batería hacia el sistema de condensadores. (L)

¿Cuanto se pierde?

$$\begin{aligned}\text{Energía perdida} &= W_{\text{bat}} - (U'' - U') \\ &= 1875 \mu\text{J} - 1790.23 \mu\text{J} \\ &= 84.77 \mu\text{J}\end{aligned}$$

(Se sugiere leer el Ejemplo 24.7, Sears-Zemansky)
En este ejemplo se carga un condensador con una batería, se aísla el condensador (desconectado de la batería) y se conecta en paralelo a otro condensador. Se determina (numéricamente) que la energía inicial es mayor a la final. Se "pierde" energía por calentamiento y radiación electromagnética.