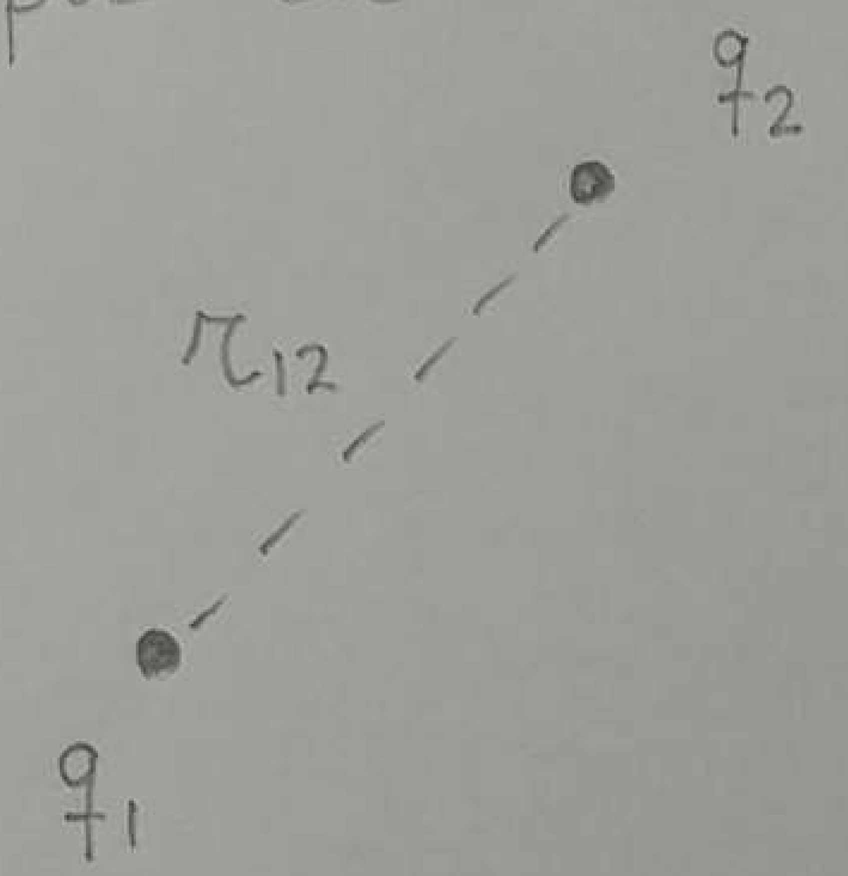
Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas

Si tenemos dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas por una distancia r_{12}, la energía potencial eléctrica de ese sistema está dada por

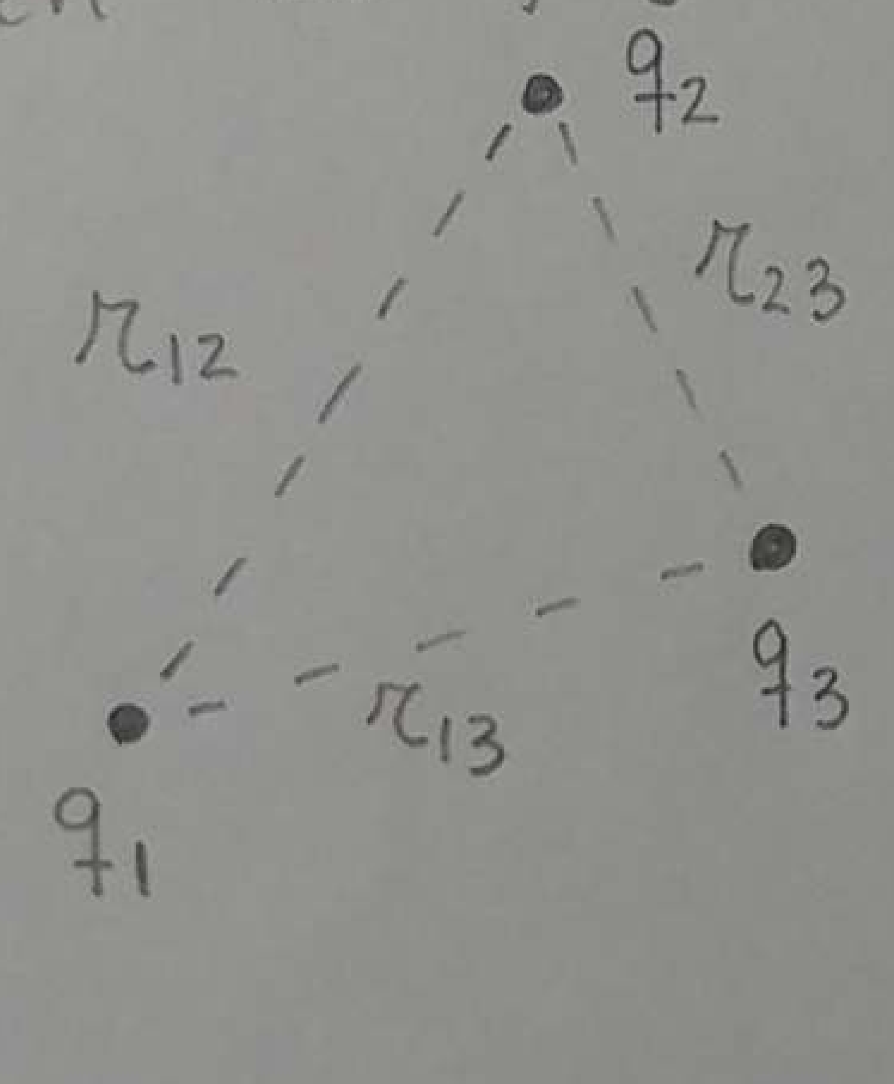
$$U_{sist}\{q_1, q_2\} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (1)$$

donde $K\frac{q_1}{r_{12}}$ es el potencial eléctrico que produce la carga q_1 en el punto donde está la carga q_2, o equivalentemente, $K\frac{q_2}{r_{12}}$ es el potencial eléctrico que produce la carga q_2 en el punto donde está la q_1.

En la figura se muestra las cargas q_1 y q_2 separadas por la distancia r_{12}



Supongamos ahora que añadimos una carga q_3 al sistema y la colocamos en la posición que se muestra en la figura



al añadir la carga q_3, se añade una energía potencial eléctrica dada por $q_3 V_3$, donde V_3 es el potencial eléctrico que producen las cargas "originales" del sistema (q_1 y q_2) en el punto donde se coloca la carga q_3, esto es

$$V_3 = K\frac{q_1}{r_{13}} + K\frac{q_2}{r_{23}} \qquad (2) .$$

La energía del nuevo sistema de cargas $\{q_1, q_2, q_3\}$ es la suma de la energía potencial del sistema de cargas $\{q_1, q_2\}$ dada por la ecuación (1) mas la energía potencial "añadida" $q_3 V_3$ al colocar a q_3 en la posición que se muestra en la figura anterior, esto es:

$$U_{sist}\{q_1, q_2, q_3\} = U_{sist}\{q_1, q_2\} + q_3 V_3 \qquad (3)$$

Usando (1), (2) y (3) tenemos

$$U_{sist}\{q_1, q_2, q_3\} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + q_3\left(K\frac{q_1}{r_{13}} + K\frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

$$U_{sis}\{q_1, q_2, q_3\} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K\frac{q_2 q_3}{r_{23}} \qquad (4)$$

Noten que en la ecuación (4), cada término tiene la forma $K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ y que hay tantos términos como pares de partículas puedan formarse. Es decir, si se tienen tres partículas denotadas por 1, 2 y 3, los posibles pares que pueden formarse son: el par 1-2, el par 1-3 y el par 2-3 que corresponden respectivamente a los términos $K \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$, $K \frac{q_1 q_3}{r_{13}}$ y $K \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$ de la ecuación (4).

Si por ejemplo se tuviese un sistema de 4 cargas $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, los pares de partículas son 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4 y 3-4. Esto representa 6 términos para la energía potencial del sistema $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$:

$$U_{sist\{q_1,q_2,q_3,q_4\}} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + K \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + K \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + K \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \quad (5)$$

En las clases grabadas se llega a la conclusión de que la energía potencial eléctrica de un sistema formado por N cargas puntuales puede escribirse como

$$U_{sist}\{q_1, q_2, \ldots q_N\} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 + \cdots\cdots + \frac{1}{2} q_N V_N \quad (6)$$

donde V_1 es el potencial eléctrico en el punto donde está la carga q_1. Este potencial V_1 es producido en ese punto por las otras cargas, es decir, por $q_2, q_3, \ldots\ldots q_N$. De la misma forma, el potencial eléctrico V_2 es el que existe en el punto donde se encuentra la carga q_2. Este potencial V_2 se debe a las otras cargas (distintas de la q_2), es decir, a las cargas $q_1, q_3, q_4, \ldots\ldots q_N$. Y así sucesivamente con todos los potenciales $V_3, V_4, \ldots\ldots V_N$.

Para finalizar esta parte correspondiente a sistemas de cargas puntuales, es importante tener en cuenta que $U_{sist}\{q_1, q_2, \ldots q_N\}$ representa también el trabajo que realiza un "agente externo" en contra del campo eléctrico para formar un sistema de cargas. Esto ha sido explicado en las clases grabadas. Esto quiere decir que para que haya energía potencial acumulada en un sistema de cargas, primero un agente externo debe realizar trabajo para colocar a todas las cargas en sus respectivas posiciones en el sistema.

La ecuación (6) puede escribirse en forma compacta como

$$U_{sist}\{q_1, q_2, \ldots q_N\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, q_i\, V_i \qquad (7)$$

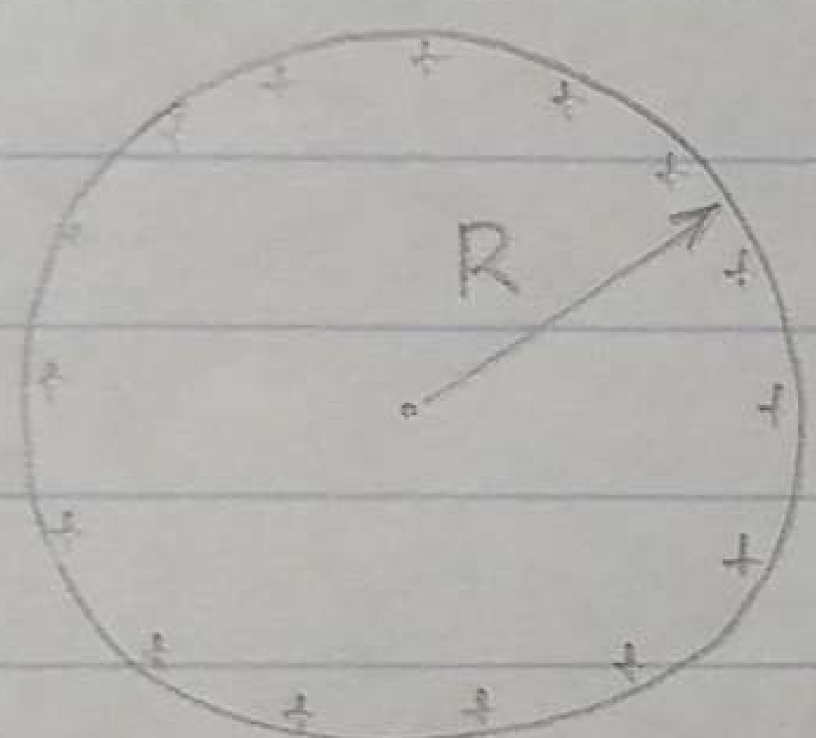
Si las cargas del sistema están tan cercanas entre sí que no pueden distinguirse las distancias entre ellas, entonces el sistema de cargas es una distribución contínua de cargas y el U_{sist} viene dado por

$$U_{sist} = \int \frac{1}{2}\, V\, dq \qquad (8)$$

Noten que para "pasar" de la ecuación (7) a la (8), se reemplaza la sumatoria Σ por la integral $\int$, y q_i se reemplaza por dq. La integral (8) se realiza en toda región del espacio donde exista carga. V es el potencial eléctrico en el punto donde está el diferencial de carga dq. Para usar la ecuación (8), primero hay que localizar (en un buen dibujo) donde está dq, luego determinar el potencial V que hay en el punto donde está dq y finalmente integrar en toda la región donde exista carga eléctrica.

Determinación de la Energía potencial eléctrica de una esfera conductora de radio R y carga Q.

Supongamos que tenemos una esfera conductora de radio R con carga $Q > 0$. Como sabemos la carga se deposita en la superficie de la esfera como se muestra en la figura.



De acuerdo a la ecuación (8)

$$U_{sist} = \int \frac{1}{2} V \, dq \qquad (9)$$

En este caso el sistema está constituído por todas las cargas eléctricas que están localizadas en la superficie de la esfera.
En la clase grabada # 13 se demostró que el potencial eléctrico en la esfera conductora es igual a

$$V = k \frac{Q}{R} \qquad (10)$$

Se dijo en esa clase que la esfera conductora es realmente un volumen equipotencial, es decir, todos los puntos de ella tienen el mismo potencial dado por la ecuación (10).

La integral de la ecuación (9) se realiza en la región del espacio donde existe carga eléctrica. En este caso, la carga eléctrica está en la superficie de la esfera porque ésta es conductora.

Por otro lado, en la ecuación (9), el potencial V es constante en todos los puntos de la esfera incluyendo los puntos de su superficie.

Esto quiere decir que para efectos de la integral de superficie de la ecuación (9), V es constante y entonces

$$U_{sist} = U_{esfera} = \frac{1}{2} V \int dq \qquad (11)$$

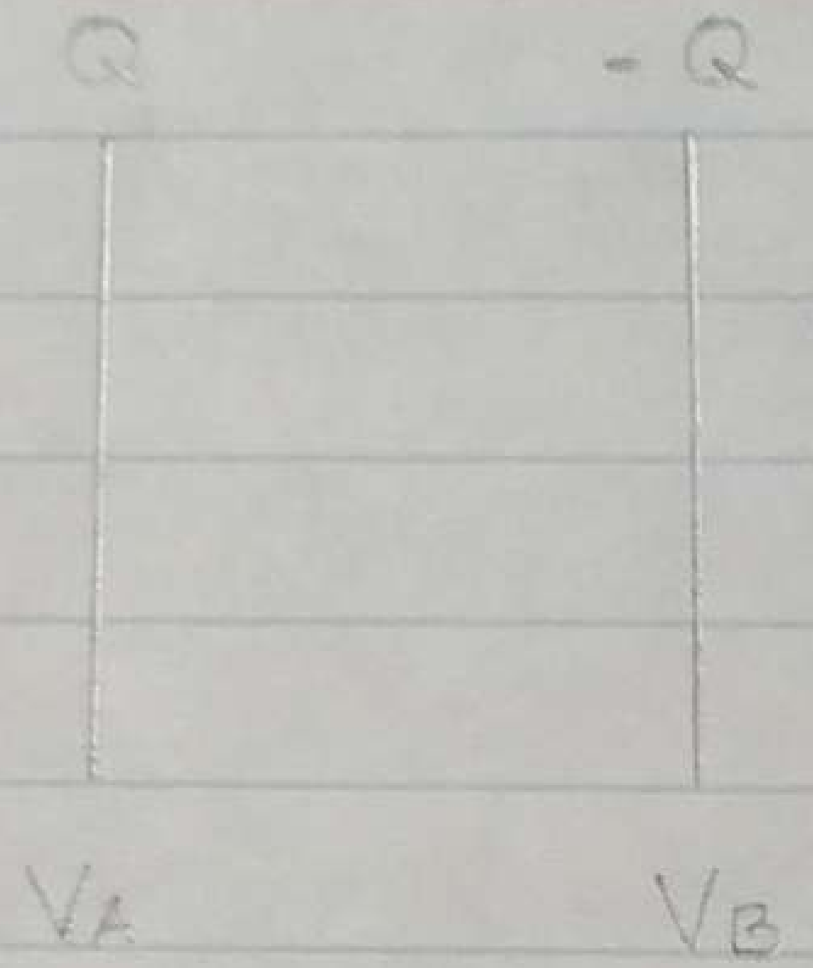
donde $\int dq$ = carga total contenida en la superficie de la esfera $= Q$ (12)

$$\Rightarrow U_{esfera} = \frac{1}{2} V Q \qquad (13)$$

Usando (10) y (13), la energía acumulada en la esfera (energía potencial eléctrica) es

$$U_{esfera} = \frac{1}{2}\left(K\frac{Q}{R}\right)Q = \frac{1}{2} K \frac{Q^2}{R} \qquad (14)$$

Determinación de la energía acumulada en un condensador (de placas paralelas)



En la figura se muestra un condensador de placas paralelas. La placa izquierda tiene una carga Q y todos los puntos de esa placa tienen el mismo potencial eléctrico V_A. La placa derecha tiene una carga $-Q$ y todos los puntos de esa placa tienen el mismo potencial V_B.

De acuerdo a la ecuación (8)

$$U_{sist} = \int \frac{1}{2} V \, dq \qquad (15)$$

En este caso el sistema está formado por todas las cargas que hay en el condensador. Ya que hay dos placas que contienen cargas, hay que hacer dos integrales: una en la placa izquierda donde hay una carga total Q y otra en la placa derecha donde hay una carga total $-Q$.

Escribimos entonces la ecuación (15) como

$$U_{sist} = U_{condensador} = U_{placa\ izquierda} + U_{placa\ derecha} \qquad (16)$$

Ya que en la placa izquierda, todos los puntos tienen el mismo potencial V_A

$$U_{\text{placa izquierda}} = \int_{\text{PLACA IZQUIERDA}} \frac{1}{2} V \, dq = \frac{1}{2} V_A \int_{\substack{\text{PLACA}\\ \text{IZQUIERDA}}} dq = \frac{1}{2} V_A Q \qquad (17)$$

De la misma forma, en la placa derecha

$$U_{\text{placa derecha}} = \int_{\substack{\text{PLACA}\\ \text{DERECHA}}} \frac{1}{2} V \, dq = \frac{1}{2} V_B \int_{\substack{\text{PLACA}\\ \text{DERECHA}}} dq = \frac{1}{2} V_B (-Q) \qquad (18)$$

Usando (16), (17) y (18)

$$U_{\text{COND}} = \frac{1}{2} Q \left(V_A - V_B \right) = \frac{1}{2} Q \, V_{AB} \qquad (19)$$

donde $V_{AB} = V_A - V_B$ se denomina diferencia de potencial eléctrico de la placa A (izquierda) con respecto a la placa B (derecha) o simplemente voltaje del condensador o capacitor.

En la clase grabada # 14 se define la capacidad del condensador como la fracción de Q y V_{AB}, esto es

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{V_A - V_B} \qquad (20)$$

De la ecuación (20) se puede despejar Q

$$Q = C\,V_{AB} \qquad (21)$$

y también se podría despejar V_{AB}

$$V_{AB} = \frac{Q}{C} \qquad (22)$$

Usando las ecuaciones (19) y (21) obtenemos

$$U_{COND} = \frac{1}{2} C\,V_{AB}^2 \qquad (23)$$

Usando las ecuaciones (19) y (22) se obtiene

$$U_{COND} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad (24)$$

Todo esto nos permite escribir

$$U_{COND} = \frac{1}{2} Q\,V_{AB} = \frac{1}{2} C\,V_{AB}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad (25)$$

En términos prácticos, uno usa la expresión de la ecuación (25) que más convenga de acuerdo al cálculo que haya que hacer.