2.14 ENERGIA POTENCIAL DE UNA DISTRIBUCION DE CARGAS

Consideremos un conjunto de cargas distribuidas en el espacio como indica la figura 2.14. Vamos a suponer que la configuración de cargas tiene una extensión finita y que no tenemos otras cargas presentes. Cada carga está situada en el campo producido por las restantes, en un punto en el que el potencial V debido a las demás tiene un valor definido. En consecuencia, cada carga tiene asociada una energía potencial, bien sea positiva o negativa, y el sistema completo tiene una energía potencial que vamos a calcular.

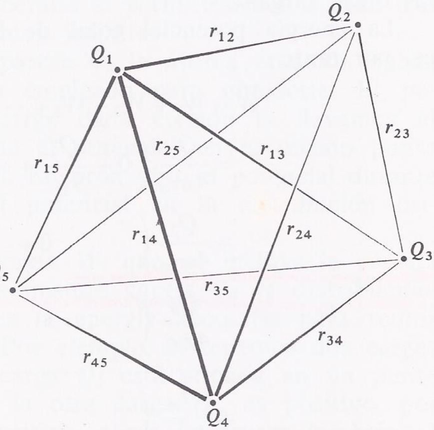

Figura 2.14 Conjunto de cargas puntuales Q_1, Q_2, ..., Q_5 separadas por las distancias r_{12}, ..., r_{45}.

Suponemos que las cargas están en equilibrio bajo la acción de fuerzas eléctricas y de fuerzas mecánicas de ligadura.

Sean Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_N las N cargas y r_{12} la distancia entre Q_1 y Q_2, r_{13} la correspondiente entre Q_1 y Q_3, y así sucesivamente, como se indica en la figura 2.14. Ahora llevamos lentamente la carga Q_1 al infinito, de tal forma que siempre estén en equilibrio las fuerzas eléctricas y mecánicas. De esta forma no existe aceleración y, por tanto, prescindimos de la energía cinética. Las otras cargas permanecen fijas.

La disminución W_1 en la energía potencial de la carga es igual al trabajo realizado por las fuerzas eléctricas, que viene dado por el producto de la carga Q_1 y el potencial V_1 producido por todas las otras cargas en la posición original de Q_1. Entonces,

$$W_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{1N}}\right). \tag{2.119}$$

Como vemos, todas las cargas, a excepción de Q_1, aparecen en la serie de términos incluidos en el paréntesis.

Una vez quitada Q_1, llevamos Q_2 a un punto infinitamente alejado de Q_1. La disminución W_2 en la energía potencial de Q_2, es:

$$W_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{2N}}\right). \tag{2.120}$$

Esta serie tiene solamente $N-2$ términos en el paréntesis, ya que Q_1 y Q_2 no figuran. Continuamos el proceso para todas las cargas restantes, con lo que vamos disminuyendo los términos de la serie hasta que, finalmente, la carga N-ésima se puede quitar sin ningún cambio de energía, dado que no existe campo una vez que se han alejado todas las otras cargas.

La energía potencial total de la distribución de cargas original es, por tanto:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_N, \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{1N}}\right)\\
&+ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{2N}}\right)\\
&+ \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(0 + \frac{Q_4}{r_{34}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{3N}}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0}\left(0\right).
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Ahora podemos agrupar términos dentro de los paréntesis, sumando a la izquierda y debajo de la diagonal de ceros, los términos simétricamente situados a la otra parte de la diagonal. De esta forma, cada término de la serie aparece dos veces, y

$$\begin{aligned}
2W &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(0 + \frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_4}{r_{14}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{1N}}\right)\\
&+ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{21}} + 0 + \frac{Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_4}{r_{24}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{2N}}\right)\\
&+ \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{31}} + \frac{Q_2}{r_{32}} + 0 + \frac{Q_4}{r_{34}} + \cdots + \frac{Q_N}{r_{3N}}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{N1}} + \frac{Q_2}{r_{N2}} + \frac{Q_3}{r_{N3}} + \frac{Q_4}{r_{N4}} + \cdots + 0\right).
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Así, la primera línea es Q_1V_1, la segunda Q_2V_2, y así sucesivamente, de forma que:

$$2W = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + \cdots + Q_NV_N, \tag{2.124}$$

y la energía potencial de la distribución de carga original, es:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_iV_i, \tag{2.125}$$

donde V_i es el potencial en el *sistema sin modificar,* debido a todas las cargas *excepto* Q_i en el punto ocupado por ésta.

La energía propia de cada carga *no* la hemos tenido en cuenta y corresponde a la energía que se liberaría si permitiésemos a cada una de ellas aumentar hasta un volumen infinito.

La razón del factor 1/2 que aparece en la última ecuación queda clara al considerar el argumento empleado para obtenerla. El potencial en la posición de una carga dada cuando la llevamos al infinito es, en general, menor que el potencial en el mismo punto de la distribución de carga original. En promedio, el potencial durante el alejamiento vale la mitad del potencial en la distribución original.

Hay que destacar que esta energía W, que *no* incluye la energía que se requiere para producir las mismas cargas de la distribución, puede ser positiva o negativa. Es la energía necesaria para reunir cargas puntuales que ya existen. Por ejemplo, si tenemos dos cargas puntuales positivas Q_1 y Q_2, la carga Q_1 está situada en un punto donde el potencial V_1, debido a la otra carga Q_2, es positivo, por lo que el producto Q_1V_1 será positivo, como le ocurre también al término Q_2V_2, resultando positiva la energía potencial $W = Q_1Q_2/4\pi\epsilon_0 r^2$ de esta distribución. Si tenemos una carga positiva Q_1 y una negativa Q_2, el valor V_1 es negativo y Q_1V_1 lo es también. El otro producto Q_2V_2 es también negativo y la energía W resulta negativa. También hay que destacar que, para una única carga, el anterior valor W es cero.

Para una distribución continua de carga eléctrica, de densidad $\rho(x', y', z')$, sustituimos Q_i por $\rho\, d\tau'$ y el sumatorio por una integral:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau'} V\rho\, d\tau'. \tag{2.126}$$

No obstante, esta generalización puede resultar confusa, ya que ahora hemos incluido las energías que se necesitan para producir las mismas cargas macroscópicas. De hecho, como se verá en la sección siguiente, esta integral es siempre positiva. El recinto de integración es cualquier volumen arbitrario τ' que contiene todas las cargas del sistema