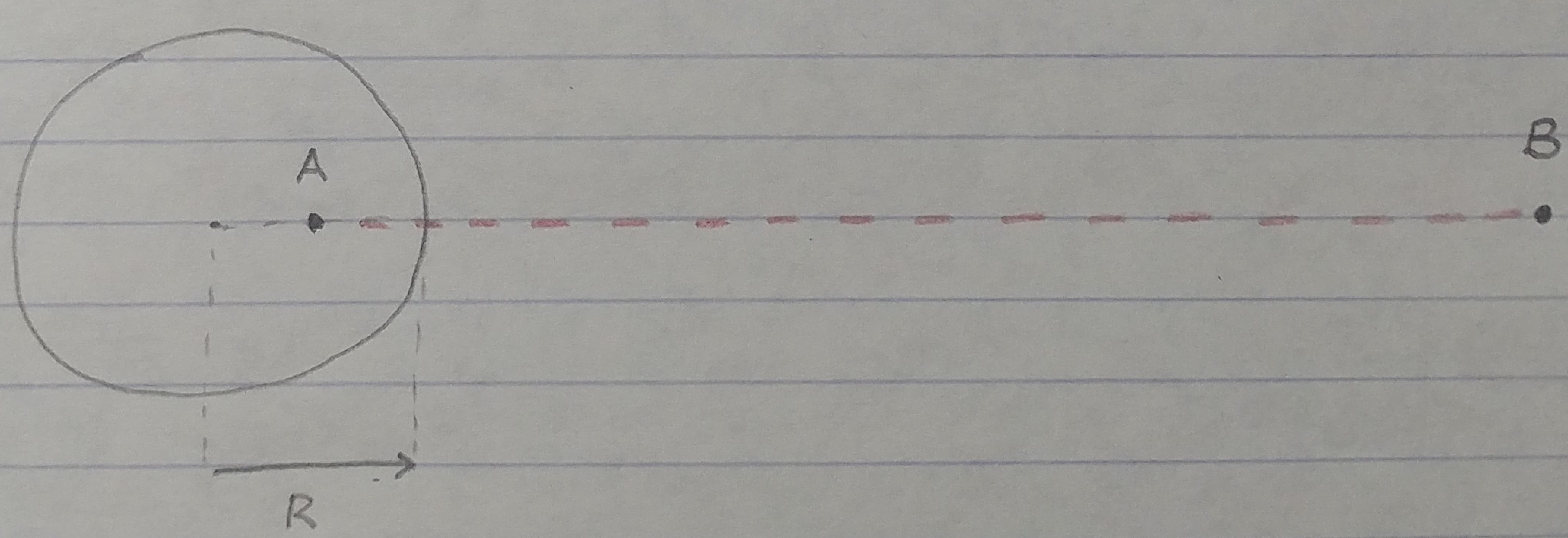
Se tiene un aislante esférico sólido de radio R que contiene una densidad volumétrica de carga $\rho = Ar$, donde A es una constante conocida y r es la distancia de cualquier punto del aislante a su centro. a) Determine la diferencia de potencial eléctrico entre un punto localizado en $r = R/2$ y un punto que se encuentra a una distancia muy grande (infinito) del centro del aislante.

b) Tomando como referencia en el infinito el potencial eléctrico igual a cero, calcule el potencial eléctrico en $r = R/2$.

a) En la figura se muestra el punto A localizado a una distancia $r = R/2$ y el punto B en el infinito.



La diferencia de potencial eléctrico entre A y B viene dada por

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} \qquad (1)$$

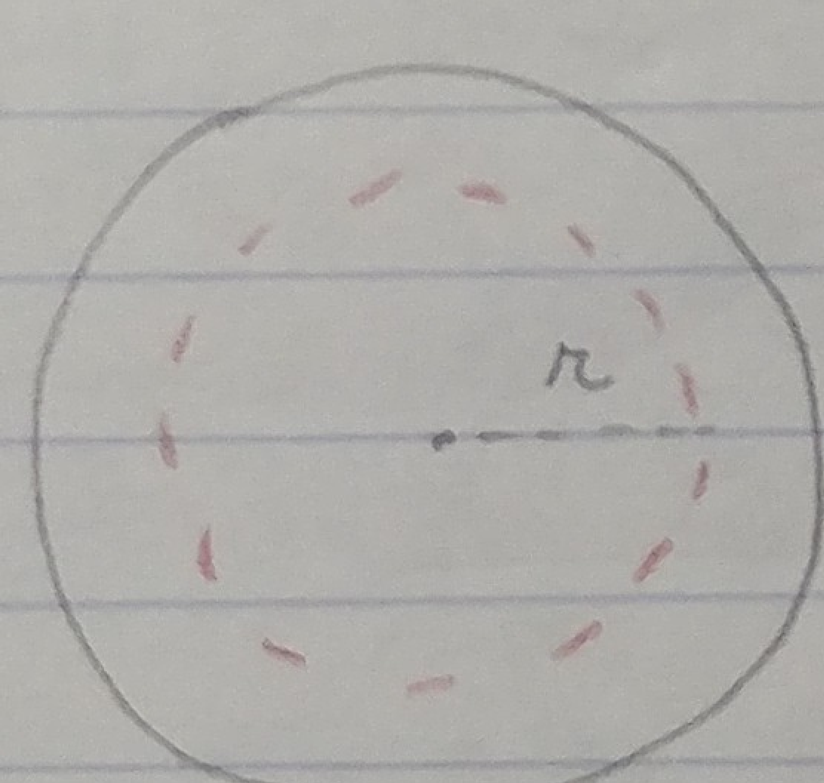
Para ir de A a B a través de la trayectoria punteada roja hay que pasar primero por la región del aislante comprendida entre $r_A = R/2$ y $r = R$ y luego atravesar la región externa que se extiende de $r = R$ hasta $r = r_B$, donde $r_B \to \infty$.

La ecuación (1) puede escribirse como

$$V_A - V_B = \int_{r_A = R/2}^{R} \vec{E}_1 \cdot \vec{dr} + \int_{R}^{r_B = \infty} \vec{E}_2 \cdot \vec{dr} \qquad (2)$$

donde $\vec{E}_1$ es el campo eléctrico en el aislante y $\vec{E}_2$ es el campo eléctrico fuera del aislante.

<u>Cálculo de $\vec{E}_1$</u>



Usando Ley de Gauss, tomando la superficie Gaussiana esférica roja de radio r

$$\oint_{SUP} \vec{E}_1 \cdot \vec{dr} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow E_1 \, 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$ donde

Q_{enc} es la carga encerrada por la superficie Gaussiana, esto es

$$Q_{enc} = \int \rho \, dVol \, , \qquad (5)$$

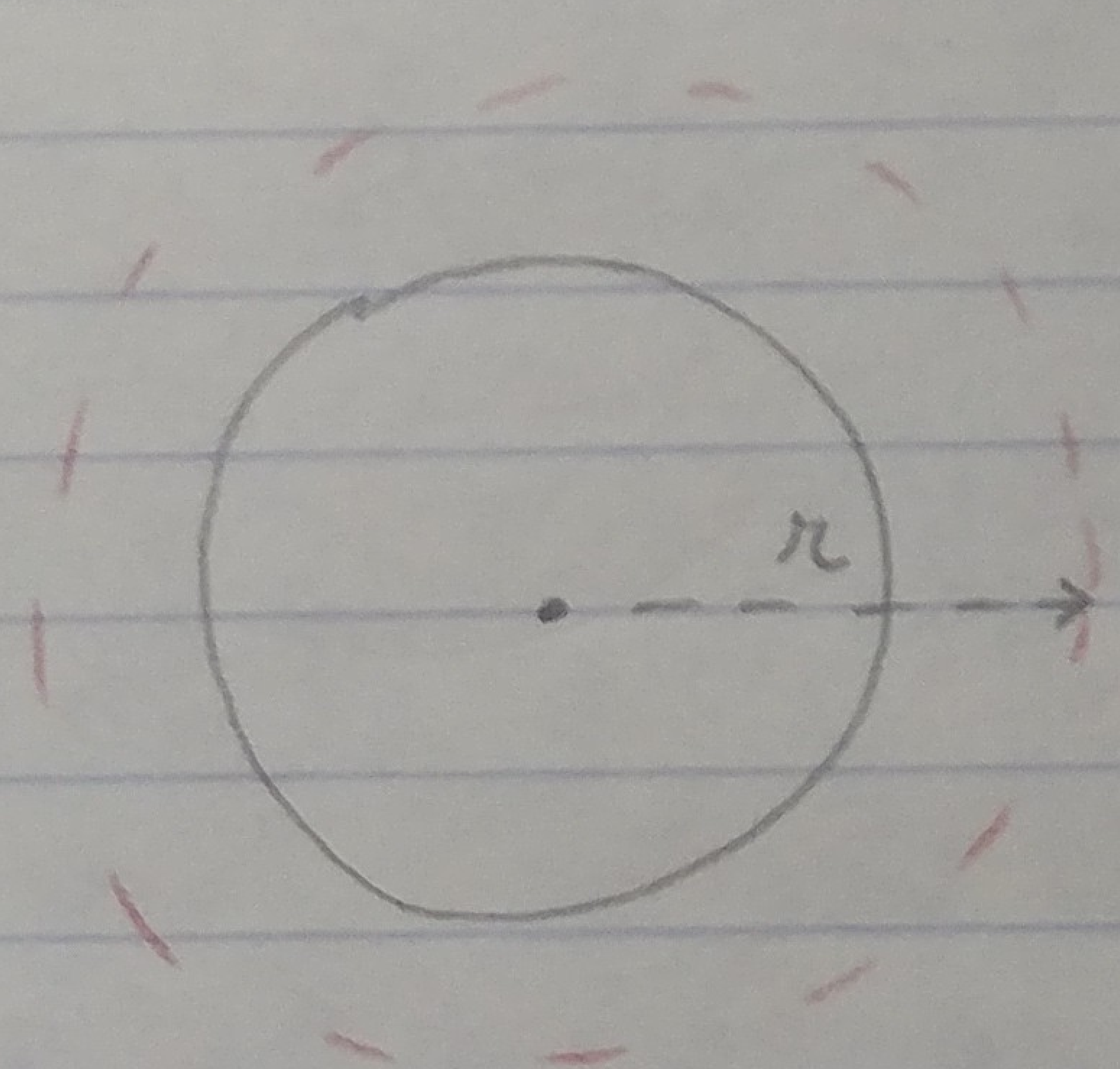
donde $dVol = 4\pi r'^2 dr'$ es el diferencial de volumen apropiado para la simetría esférica y la integral se realiza en el volumen encerrado por la superficie Gaussiana roja.

De esta forma, se tiene que

$$Q_{enc} = \int_0^r A r' (4\pi r'^2) \, dr' = \pi A r^4 \qquad (6)$$

Con (4) y (6) $\Rightarrow$ $E_1 = \dfrac{A}{4\varepsilon_0} r^2$ (7) $\qquad \vec{E}_1 = E_1 \hat{r}$ (8)

<u>Cálculo de E_2</u>



Usando la Ley de Gauss (Ecuación 3) para la superficie Gaussiana roja que se muestra, se obtiene

$$E_2 \, 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad (9)$$

En este caso Qenc es <u>toda</u> la carga que hay en el aislante, esto es

$$Q_{enc} = \int_0^R \rho \, dVol = \pi A R^4 \qquad (10)$$

Combinando (9) y (10)

$$E_2 \, 4\pi r^2 = \frac{\pi A R^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{A R^4}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}\right) \qquad (10)'$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \, \hat{r} \qquad (11)$$

Teniendo $\vec{E}_1 = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \, \hat{r}$ (12) y

$$\vec{E}_2 = \frac{A R^4}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}\right) \hat{r} \qquad (13)$$

podemos entonces calcular $V_A - V_B$ usando la ecuación (2)

$$V_A - V_B = \int_{R/2}^{R} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \qquad (14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (12) y (13) en la (14):

$$V_A - V_B = \int_{R/2}^{R} \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \, dr + \int_R^{\infty} \frac{A R^4}{4\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} \qquad (15)$$

$$V_A - V_B = \frac{A}{4\varepsilon_0}\int_{R/2}^{R} r^2\,dr + \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\int_{R}^{\infty}\frac{dr}{r^2}$$

$$V_A - V_B = \left(\frac{A}{4\varepsilon_0}\right)\frac{r^3}{3}\Bigg|_{R/2}^{R} + \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R}^{\infty}$$

$$V_A - V_B = \frac{A}{12\varepsilon_0}\left(R^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right) + \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$V_A - V_B = \left(\frac{7}{96} + \frac{1}{4}\right)\frac{AR^3}{\varepsilon_0} = \frac{31}{96}\frac{AR^3}{\varepsilon_0} \qquad (16)$$

La ecuación (16) es la diferencia de potencial eléctrico entre el punto A que está a una distancia $r = R/2$ del centro del aislante y el punto B que está en "el infinito".

b) Si se toma al potencial eléctrico en el infinito como cero ($V_B = 0$), entonces de la ecuación (16) se tiene que el potencial en el punto A es

$$V_A = \frac{31}{96}\frac{AR^3}{\varepsilon_0} \qquad (17)$$

Comentario adicional

Si se pidiera el potencial eléctrico en un punto en el interior del aislante localizado a una distancia r genérica del centro entonces

$$V_A - \cancel{V_B}^{\,0} = V_A = V(r) \qquad (18)$$

y la ecuación (15) se tendría que escribir como

$$V_A - V_B = V(r) = \int_r^R \frac{A}{4\varepsilon_0} r'^2 \, dr' + \int_R^\infty \frac{A R^4}{4\varepsilon_0} \frac{dr'}{r'^2} \qquad (19)$$

De esta forma

$$V(r) = \frac{A}{4\varepsilon_0} \frac{r'^3}{3} \Bigg|_r^R + \frac{A R^4}{4\varepsilon_0} \left(- \frac{1}{r'} \right) \Bigg|_R^\infty$$

$$V(r) = \frac{A}{12\varepsilon_0} \left(R^3 - r^3 \right) + \frac{A R^3}{4\varepsilon_0} = \frac{A R^3}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{A R^3}{\varepsilon_0} \left(\frac{1+3}{12} \right) - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 = \frac{A R^3}{3\varepsilon_0} - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{A}{3\varepsilon_0} \left(R^3 - \frac{r^3}{4} \right) \qquad (20)$$

Para comprobar la validez de la ecuación (20) podríamos evaluarla cuando $r = R/2$ y el resultado es

$$V(r=R/2) = \frac{A}{3\varepsilon_0}\left(R^3 - \frac{(R/2)^3}{4}\right)$$

$$= \frac{A}{3\varepsilon_0}\left(R^3 - \frac{R^3}{32}\right) = \frac{A}{3\varepsilon_0}\left(\frac{31}{32}\right)R^3 = \frac{31}{96}\frac{AR^3}{\varepsilon_0} \quad (21)$$

La ecuación (21) es igual a la (17). Queda comprobada la validez de la ecuación (20).