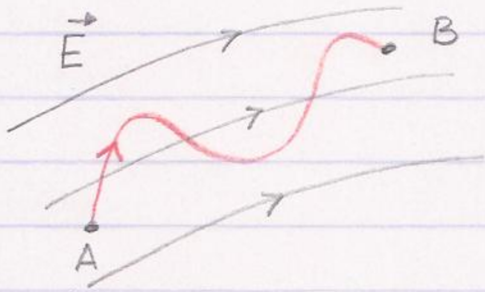
COMPLEMENTO A
Clase Presencial P4
CAP. 23

Una partícula que tiene carga q y se mueve de un punto A a un punto B en una región del espacio donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$, experimenta una fuerza $\vec{F}_e = q\vec{E}$.



✓ La fuerza $\vec{F}_e$ que ejerce el campo eléctrico sobre la partícula de carga q realiza un trabajo igual a $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r}$, donde $d\vec{r}$ es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria roja.

✓ La integral anterior se realiza a lo largo de cualquier trayectoria que una al punto A con el punto B. Esto es así debido a que la fuerza $\vec{F}_e$ es conservativa lo que significa que el trabajo de esta fuerza no depende de la trayectoria que uno escoja para hacer la integral.

✓ En términos prácticos, uno escoje la trayectoria más sencilla que pueda para calcular la integral.

✓ Se demuestra que $W_{AB} = -\Delta U$, donde U es la energía potencial eléctrica de la partícula que tiene carga q y ΔU es el cambio que experimenta U cuando la partícula se mueve del punto A al punto B, esto es $\Delta U = U_B - U_A$. U_B es la energía potencial eléctrica de la partícula con carga q cuando esta partícula pasa por el punto B. De la misma forma se define U_A (cuando la partícula pasa por el punto A).

✓ Se demuestra también que el trabajo total que actua sobre una partícula está vinculado con el cambio de su energía cinética, esto es, $W^T_{AB} = \Delta K = K_B - K_A$.

✓ Si la única fuerza que actúa sobre una partícula es la eléctrica entonces

$$W^T_{AB} = W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\,\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Podemos entonces escribir

$$W_{AB} = \int_A^B q\,\vec{E}\cdot d\vec{r} = \Delta K = -\Delta U \qquad (1)$$

$$\Delta K = K_B - K_A \qquad (2) \qquad\qquad \Delta U = U_B - U_A \qquad (3)$$

(1), (2) y (3) $\Rightarrow$

$$\Delta K = -\Delta U$$
$$K_B - K_A = -(U_B - U_A)$$
$$K_B - K_A = -U_B + U_A$$
$$U_A + K_A = U_B + K_B = \text{constante} \qquad (4)$$

$$K_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \qquad (5) \qquad\qquad K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \qquad (6)$$

m es la masa de la partícula que se mueve de A a B.

¿Cómo se obtiene v_A y v_B?

Para responder esta pregunta, se divide la ecuación (1) entre la carga q

$$\frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\Delta K}{q} = -\frac{\Delta U}{q} \qquad (7)$$

Usando (2) y (3) en (7)

$$\frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{K_B - K_A}{q} = \frac{U_A - U_B}{q} \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{U_A}{q} - \frac{U_B}{q} \qquad (9)$$

Trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico entre el punto A y el punto B

Integral a lo largo de una trayectoria (la más sencilla que se pueda) que conecta al punto A con el punto B.

Definición : $V_A = \frac{U_A}{q}$ (10)

Potencial eléctrico (en el punto A) producido por las cargas eléctricas que generan el campo eléctrico

Analogamente se define V_B.

✓ Hay que recordar que U_A es la energía potencial eléctrica de la partícula que tiene carga q.

✓ De la ecuación (10) se sigue que

$$U_A = q\, V_A \qquad (11)$$

$$U_B = q\, V_B \qquad (12)$$

Las ecuaciones (11) y (12) quieren decir que debemos calcular V_A y V_B para poder determinar U_A y U_B respectivamente.

En general, se puede escribir que la energía potencial eléctrica de una partícula que tiene una carga q es igual a

$$U = q\, V \qquad (13)$$

donde V es el potencial eléctrico (creado por otras cargas) en el punto donde está la partícula de carga q.

<u>Nota</u>: Las unidades de $\frac{W_{AB}}{q}$ son $\frac{J}{C}$.

1 voltio = 1 V = 1 $\frac{J}{C}$. Las unidades de V son voltios.

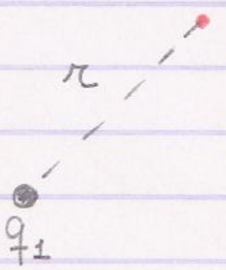
✓ La pregunta ahora es: ¿Cómo se obtiene el potencial eléctrico V producido por las cargas que generan el campo eléctrico $\vec{E}$?

✓ ¿Cuales son las "cargas" que generan a $\vec{E}$? Hay distintos casos de interés en este curso.

Uds. deben saber como obtener el potencial eléctrico V producido por:

a) Una carga puntual
b) Muchas cargas puntuales
c) Una distribución continua de cargas

a)



¿Cuál es el V producido por una carga q_1 a una distancia r de ella?

Para determinar V, debemos recordar las ecuaciones (8), (9) y (10), y escribirlas como

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr} = V_A - V_B \qquad (14)$$

La ecuación (14) contiene una información parcial de la información que contienen las ecuaciones (8), (9) y (10). Pero esta ecuación (14) es suficiente para resolver el problema que en este momento tenemos.

✓ De hecho la ecuación (14) se usa en los casos en los que se conoce $\vec{E}$. Si se conoce $\vec{E}$, podemos hacer la integral de la ecuación (14) y entonces obtener $V_A - V_B$.

✓ $V_A - V_B$ se denomina diferencia de potencial eléctrico de A con respecto a B

✓ Si tenemos $\vec{E}$, hacemos la integral de la ecuación (14) y conseguimos $V_A - V_B$.

✓ Pero todavía no tenemos cuánto vale V_A o V_B por separado.

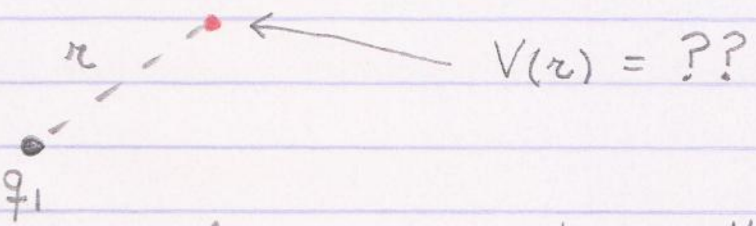
✓ Para determinar V en cada punto del espacio, ya sea en el punto A, en el punto B o cualquier otro, hay que escoger una referencia.

✓ ¿Qué quiere decir "escoger" una referencia?

✓ Quiere decir: escoger un punto donde V vale cero.

✓ ¿Cuál es ese punto? Depende del problema que tengan.

En el caso del problema de determinar el V producido por una carga puntual q_1 a una distancia r genérica,

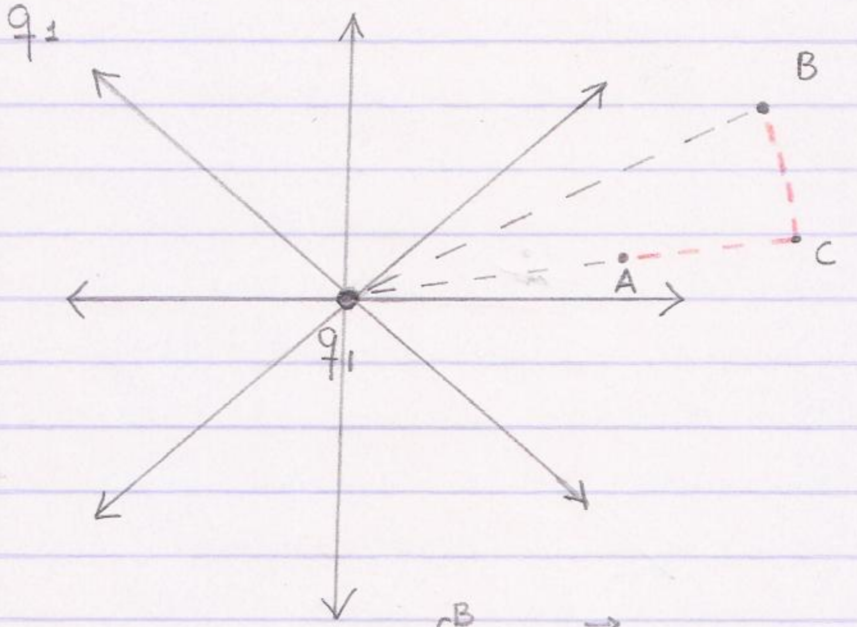


el punto de referencia se toma "en el infinito" lo que quiere decir que arbitrariamente imponemos que $V(r) = 0$ cuando $r \to \infty$. Es decir, imponemos que a una distancia muy grande, V es cero.

✓ Volvamos a la ecuación (14). El campo $\vec{E}$ que produce la carga puntual q_1 a una distancia r tiene una magnitud igual a

$$|\vec{E}_1| = k \frac{q_1}{r^2} \qquad (15)$$

Visualicemos ahora los puntos A y B inmersos en el campo eléctrico de la carga puntual q_1



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

La integral $\int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}$ se puede dividir en dos integrales

$$\int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = \int_A^C \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_C^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} \quad (17)$$

✓ En la integral de C a B, $\vec{E}_1$ va en dirección radial y $d\vec{r}$ en dirección tangencial, de modo que $\vec{E}_1$ es perpendicular a $d\vec{r}$ y por lo tanto $\vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = 0$ para el tramo $C \rightarrow B$.

✓ En la integral de A a C, $\vec{E}_1$ es paralelo a $d\vec{r}$ y por lo tanto $\vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = E_1 dr$

$$\Rightarrow \int_A^C \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = \int_A^C E_1 dr = \int_{r_A}^{r_C} K \frac{q_1}{r^2} dr = K q_1 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B}$$

De acuerdo a los resultados anteriores

$$\int_A^B \vec{E}_1 \cdot \vec{dr} = \int_A^C \vec{E}_1 \cdot \vec{dr} = K q_1 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B} \qquad (18)$$

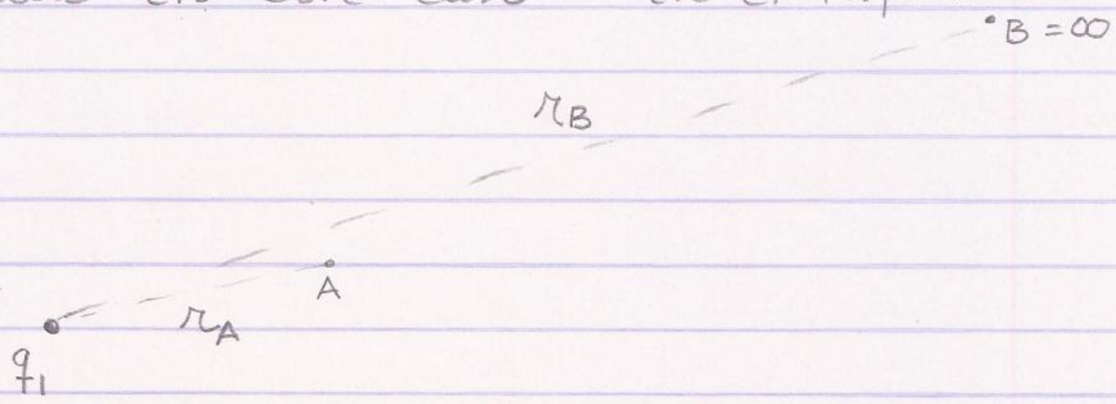
Por la ecuación (14)

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_1 \cdot \vec{dr} \qquad (19)$$

$$(18) \text{ y } (19) \Rightarrow V_A - V_B = K q_1 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad (20)$$

La ecuación (20) nos da la diferencia de potencial eléctrico del punto A con respecto al punto B, $V_A - V_B$, en función de las distancias de dichos puntos a la carga q_1.

Para averiguar cuanto vale V en cada punto del espacio, se selecciona la referencia en este caso "en el infinito"



✓ En la figura anterior "colocamos el punto B en el infinito". De esta forma $r_B \to \infty$.

✓ Luego decimos (imponemos) que el potencial en ese punto B es cero. Esto es: $V_B = 0$

✓ además, decimos que la distancia r_A del pto. A es una distancia genérica r

Con todo esto, en la ecuación (20)

$$V_A - V_B = K q_1 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \qquad (21),$$

V_B se hace cero, $\frac{1}{r_B}$ es cero pues $r_B \to \infty$

y $r_A = r$. De esta forma, la ecuación (21) queda igual a

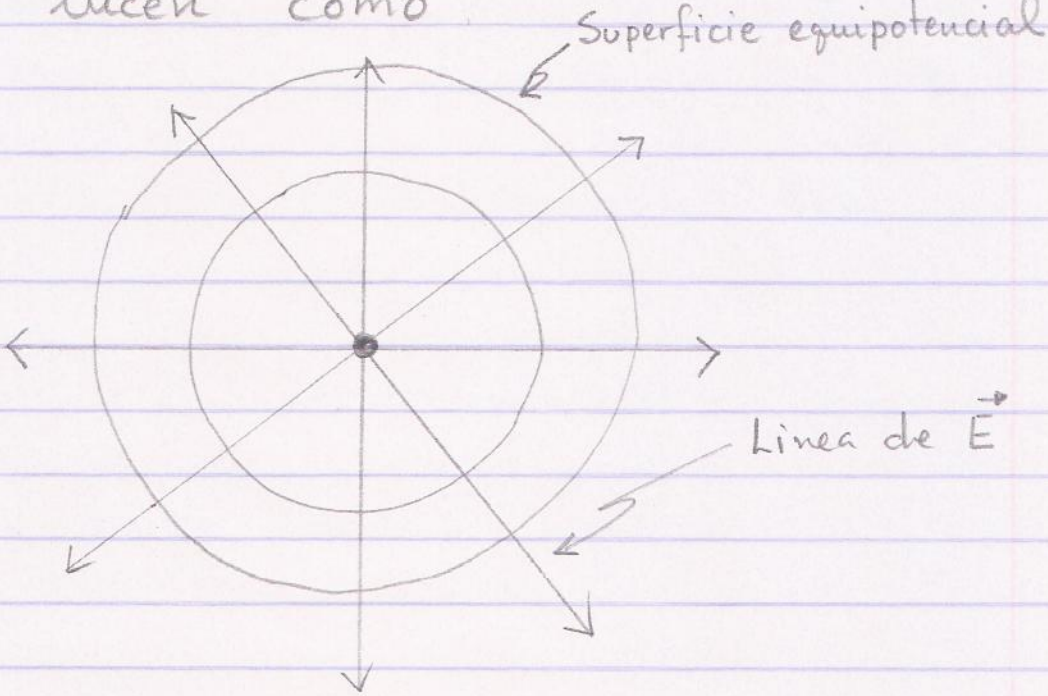
$$V_A = V(r_A) = V(r) = K \frac{q_1}{r} \qquad (22)$$

Entonces, una carga puntual q_1 genera un potencial V a una distancia r de ella dado por

$$V(r) = K \frac{q_1}{r} \qquad (23)$$

✓ A partir de la ecuación (23) nos damos cuenta que todos los puntos que están sobre una superficie esférica imaginaria (centrada en la carga q_1) de radio r tienen el mismo potencial eléctrico. Esto define lo que constituye una superficie equipotencial.

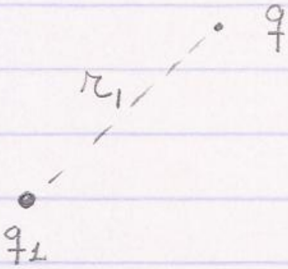
✓ Entonces en el caso de una carga puntual q_1, las superficies equipotenciales y líneas de $\vec{E}$ lucen como



✓ Vemos que las lineas de $\vec{E}$ son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

✓ Las lineas de $\vec{E}$ siempre van dirigidas de las zonas de mayor potencial eléctrico a las zonas de menor potencial eléctrico.

✓ Una vez que se obtiene V se puede calcular la energía potencial eléctrica de una carga q inmersa en el campo eléctrico de la carga q_1



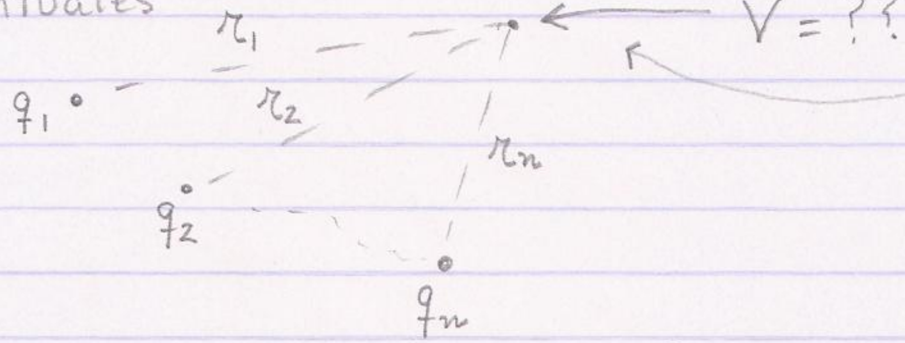
$$U = q\,V = q\,\frac{K\,q_1}{r_1} \qquad (24)$$

$$U = K\,\frac{q_1\,q}{r_1} \qquad (25)$$

✓ U es también la energía potencial del sistema formado por las cargas q_1 y q, puesto que ellas interactúan entre sí y una energía potencial se origina en la interacción entre partículas.

✓ U es también (esto se demuestra; ver video) el trabajo externo necesario para traer a la carga q desde el infinito y colocarla a una distancia r_1 de la carga q_1.

b) Si se tiene un sistema de n cargas puntuales



el potencial V será $V = K\dfrac{q_1}{r_1} + K\dfrac{q_2}{r_2} + \ldots K\dfrac{q_n}{r_n}$, (26)

es decir cada carga q_i produce un potencial eléctrico V_i en cada punto del espacio y el potencial eléctrico resultante es la suma algebraica de todos los potenciales

$$V = \sum_{i=1}^{n} K\frac{q_i}{r_i} \qquad (27)$$

Si se coloca una partícula de carga q en el punto señalado en la figura, entonces la energía potencial de esa partícula (por su interacción con las cargas $q_1, q_2, \ldots q_n$) es

$$U = q\,V = q\sum_{i=1}^{n} K\frac{q_i}{r_i} = q\left(K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} + \ldots K\frac{q_n}{r_n}\right)$$

(28)

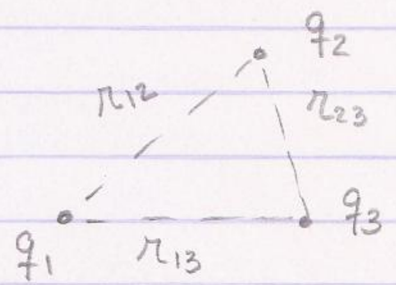
Esta U tambien representa el trabajo externo necesario para traer a la partícula de carga q desde el infinito y colocarla en el punto señalado en la pag. 14.

Energía acumulada en un sistema de partículas cargadas:

Si tenemos dos cargas q_1 y q separadas por una distancia r_{12}, la energía de ese sistema está dada por

$$U_{sist} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (29)$$

Si tenemos tres cargas, se puede demostrar (ver video) como el que se muestra



$$U_{sist} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \qquad (30)$$

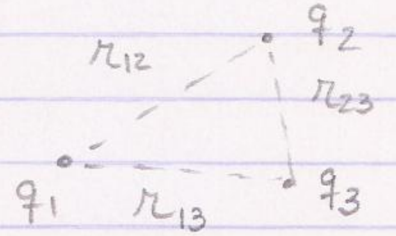
Para un sistema de n partículas, hay tantos terminos del tipo $K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ como pares de partículas puedan formarse.

✓ Se puede demostrar que para un sistema de n partículas

$$U_{sist} = \sum_i \frac{1}{2} q_i V_i = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 + \cdots \frac{1}{2} q_n V_n$$

donde V_i es el potencial eléctrico en el punto donde está la carga q_i

Por ejemplo en el caso de 3 partículas



$$V_1 = K \frac{q_2}{r_{12}} + K \frac{q_3}{r_{13}}$$

$$V_2 = K \frac{q_1}{r_{12}} + K \frac{q_3}{r_{32}}$$

$$V_3 = K \frac{q_1}{r_{13}} + K \frac{q_2}{r_{23}}$$

$$U_{sist} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 + \frac{1}{2} q_3 V_3 = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + K \frac{q_1 q_3}{r_{13}}$$

✓ Se puede demostrar (ver video) que U_{sist} es tambien el trabajo externo necesario para formar un sistema de partículas cargadas, es decir, el trabajo para traer a todas las cargas desde el infinito y colocarlas en la posición que ocupan en el sistema.